Math. A.
154 h - 3
Lehmus

Lehrbuch

der angewandten Mathematik.

Dritter Band

die vorzüglichsten Lehren

der Hydrostatik, Mechanik, Hydraulik

und die

Grundzüge der Maschinenlehre enthaltend;

bearbeitet

von

D. C. L. Lehmus,

Dr. der Philosophie.

Nebst fünf Figurentafeln.

Berlin, 1822.

Bei G. Reimer.

Bayerische Staatsbibliothek München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Inhalt des dritten Bandes.

Die Hydrostatik . . . . §. 1 bis 50
Erstes Kapitel. Vom Normaldruck des Wassers auf feste Wände . . . §. 4 — 8
Aufgaben zum ersten Kapitel . . §. 9 — 23
Zweites Kapitel. Vom Gleichgewicht des Wassers mit eingesenkten Körpern §. 24 — 32
Aufgaben zum zweiten Kapitel . . §. 33 — 44
Drittes Kapitel. Vom Gleichgewicht verschiedener Flüssigkeiten u. s. w. §. 45 — 50
Die Mechanik . . . . §. 51 — 156
Erstes Kapitel. Von der gleichförmigen Bewegung . . . . §. 51 — 53
Aufgaben zum ersten Kapitel . . §. 54 — 57
Zweites Kapitel. Von der gleichförmig beschleunigten Bewegung . . §. 58 — 69
Aufgaben zum zweiten Kapitel . §. 70 — 80
Drittes Kapitel. Von der ungleichförmig beschleunigten Bewegung . §. 81 — 84
Aufgaben zum dritten Kapitel . . §. 85 — 89
Viertes Kapitel. Von der gleichförmig verzögerten Bewegung . . . §. 90 — 94
Aufgaben zum vierten Kapitel nebst der Bahn geworfener Körper . §. 95 — 104
Fünftes Kapitel. Von der ungleichförmig verzögerten Bewegung . . . §. 105 — 106
Aufgaben zum fünften Kapitel . §. 107 — 112
Sechstes Kapitel. Vom Stoß . . . §. 113 — 120
Aufgaben zum sechsten Kapitel . §. 121 — 124
Siebentes Kapitel. Von der Reduction der Massen . . . . §. 125 — 138
Aufgaben zum siebenten Kapitel . §. 139 — 144

Achtes Kapitel. Von der Fliehkraft = §. 145 bis 146
Aufgaben zum achten Kapitel = = §. 147 — 152
Neuntes Kapitel. Vom Pendel = = = §. 153 — 156
Die Hydraulik = = = = = = = = = = §. 157 — 272
Erstes Kapitel. Wasser-Mengen Bestimmungen = = = = = = = = = §. 157 — 198
Aufgaben zum ersten Kapitel = = §. 199 — 213
Zweites Kapitel. Von der Verengung der Profile und dem Rückstau = = §. 214 — 216
Drittes Kapitel. Zeit-Bestimmung bei Ausleerung und Füllung = = = §. 217 — 226
Aufgaben zum dritten Kapitel = = §. 227 — 231
Viertes Kapitel. Von der Kraft des bewegten Wassers und den Wasserrädern = = = = = = = = = = §. 232 — 249
Fünftes Kapitel. Von den Wasserhebungs Maschinen = = = = = = §. 250 — 272
Die Maschinenlehre = = = = = = = §. 273 — 291
Erstes Kapitel. Allgemeine Begriffe = §. 273 — 281
Zweites Kapitel. Von den Maschinen in gleichförmigen Beharrungszustand = = = = = = = = = = §. 282 — 283
Drittes Kapitel. Von den ungleichförmig wirkenden Maschinen, wegen Veränderlichkeit der Massen = = = §. 284 — 290
Viertes Kapitel. Vom Krumzapfen = §. 291.

Die Hydrostatik.

§. 1.

Erklärung.

Eine Materie heißt flüssig, wenn ihre Theile einen so geringen Zusammenhang unter einander haben, daß diese Materie nur dann, wenn sie von festen Wänden eingeschlossen ist, eine bestimmte Form annimmt.

Einige Flüssigkeiten sind im hohen Grad compressibel, so daß sie aus großen Räumen in ungemein kleine zusammenzupressen sind, und im Gegensatz, einen so hohen Grad von Ausdehnungskraft haben, daß sie sich aus den kleinsten Räumen in die größten, ihnen preißgegebenen, gleichförmig vertheilen, wie z. B. die Luft, Wasserdämpfe u. s. w.; andere, die tropfbar flüssigen, sind beinahe gar nicht compressibel, haben eben so wenig eine bemerkbare in ihnen wohnende Ausdehnungskraft, wie z. B. das Wasser. Mit jenen, den luftförmigen Materien beschäftigt sich die Pneumatik.

Die Hydrostatik aber ist die Lehre vom Gleichgewicht tropfbar flüssiger Materien unter sich und mit festen Körpern.

Unter allen tropfbar flüssigen Materien, interessirt uns hier diejenige welche unter dem Namen

Wasser bekannt ist, am meisten. Deswegen soll auch in den folgenden Untersuchungen durchaus statt des allgemeinen Ausdrucks, tropfbar flüssige Materie: der, Wasser gebraucht werden. Alle Abmessungen sollen in Fußen verstanden werden und γ soll durchaus das Gewicht eines rheinländischen Cubicfußes Wasser, welches im Mittel zu 66 ℔ anzunehmen ist, bezeichnen. Uebrigens gelten diese Untersuchungen für alle anderen tropfbar flüssigen Materien, und man hat blos nöthig in denen folgenden Resultaten, wenn man sie für eine andere tropfbar flüssige Materie anwenden will, an die Stelle von γ das Gewicht eines Cubicfußes derselben, zu setzen.

§. 2.

Obgleich den angestellten Versuchen zufolge das Wasser nicht gänzlich incompressibel ist, sondern durch große angewandte Kräfte ein gänzlich von festen Wänden umschlossener Raum desselben in ein kleineres Volumen zusammenzupressen ist, so kann man doch den Erfahrungen gemäß, folgenden Satz als **Grundlage der folgenden Untersuchungen** feststellen:

„Wenn Wasser in einem **oben offenen** Gefäß sich befindet, und es wirkt von irgend einer Seite her, ein Druck auf dasselbe, so wird „dadurch das Wasser in keinen kleineren Raum „zusammengepreßt, sondern es ist so incompressibel, daß, wenn durch den Druck etwa ein „Volumen = A des Wassers verdrängt wird, „dann der Wasserspiegel sich erhebt, so daß das

„Volumen der Erhebung ebenfalls = A sein „wird.“

Derselbe Fall findet statt, wenn man dem Wasser nicht an seiner Oberfläche, sondern irgendwo anders einen Ausweg der Verbreitung gestattet.

§. 3.

Wenn Wasser in einem oben offenen Gefäß eingeschlossen ist, so ist die Oberfläche desselben horizontal, und kann, obgleich ein Stück der Kugelfläche unseres Weltkörpers, wenn dieses Stück nicht groß ist, als eben angesehen werden.

Erstes Kapitel.

Vom Normaldruck des Wassers auf die dasselbe begränzenden festen Wände.

---

§. 4.

Lehrsatz.

Wenn in einem Gefäß mit horizontalen Boden, dessen Quadrat-Inhalt = A sein mag, das Wasser x Fuß hoch über A steht, so ist, das Gefäß mag sich oberhalb A erweitern oder verengen, der verticale Druck Fx, welchen der Boden auszuhalten hat, gleich dem Gewicht des Wasserprismens vom Volumen Ax, d. h. es ist $Fx = Ax\gamma$.

Beweis.

1) Es stelle *Fig.* 1 einen verticalen Durchschnitt durch das Gefäß dar, und ab bezeichne die

Durchschnittslinie desselben mit dem ebenen horizontalen Wasserspiegel, dessen Quadrat-Inhalt, φx ausdrücken soll.

2) Man stelle sich den Boden A gewichtlos und ohne alle Verbindung mit den Seitenwänden vor, dafür aber durch eine, mit dem Druck auf denselben, gleiche Gegenkraft, Fx in seiner Lage erhalten.

3) Man denke sich noch so viel Wasser ins Gefäß gegossen, daß die mit ab parallele Linie cd den Durchschnitt des neuen Wasserspiegels mit der in 1 erwähnten verticalen Durchschnitts-Ebene darstellt, und setze den verticalen Abstand der horizontalen Ebenen ab und cd gleich k, so ist die nun fürs Gleichgewicht erforderliche Kraft, welche den Boden in seiner Lage zu erhalten hat $= F(x+k)$; und also drückt $F(x+k) - Fx$ die Kraft aus, welche mit dem Bestreben des Wassers in dem Raum zwischen den horizontalen Ebenen $ab = \varphi x$ und $cd = \varphi(x+k)$, welches Bestreben sich den Einwirkungen der Schwere gemäß, lothrecht herab äußert, im Gleichgewicht steht.

4) Nach dem Cartesischen Grundsatz verhalten sich aber zwei miteinander Gleichgewicht erhaltende Kräfte umgekehrt wie die Wege, welche die Angrifspunkte derselben dann gleichzeitig durchlaufen würden, wenn durch ein gedachtes Hinzutreten einer neuen Kraft, wirkliche Bewegung erfolgte. Denkt man sich daher die Gegenkraft $F(x+k) - Fx$ um so viel vergrößert, daß in irgend einem Zeitraum der Boden A um den Weg a parallel mit sich selbst ins Gefäß geschoben würde, jedoch dergestalt, daß

das Ausfließen des Wassers verhindert bleibt, und versteht unter w den gleichzeitigen Weg, welchen der Wasserkörper zwischen den horizontalen Ebenen φx und $\varphi(x+k)$ dann seinem Bestreben entgegen durchlaufen müsse, so hat man, wenn V das Volumen dieses Wasserkörpers bezeichnet,

$$F(x+k) - Fx : V\gamma = w : a.$$

5) Nun fällt aber der Werth von V zwischen $k\varphi x$ und $k\varphi(x+k)$; bezeichnet daher k'' eine Linie, größer wie Null und kleiner wie k, so muß es einen Werth für k'' geben, für welchen $V = k\varphi(x+k'')$ wird. Setzt man diesen Werth in obige Gleichung, so entsteht

$$F(x+k) - Fx : k\gamma\varphi(x+k'') = w : a$$

und hieraus, wenn man die taylorsche Reihe anwendet, und dann durch k dividirt,

$$\text{I.} \quad \frac{F'x + \frac{k}{2}F''x + \ldots.}{\gamma\varphi(x+k'')} = \frac{w}{a}.$$

6) Durch das Verdrängen des mit Wasser gefüllt gewesenen Raums Aa muß nach §. 2 der Wasserspiegel $\varphi(x+k)$ sich um so viel erheben, daß das neue Volumen über $\varphi(x+k) = Aa$ wird. Denkt man sich daher $a'b'$ und $c'd'$ parallel mit ab und cd an solchen Stellen, daß der Raum zwischen den Ebenen $a'b'$ und ab, sowohl wie der zwischen den Ebenen $c'd'$ und cd der Größe Aa gleich wird, so stellt der Körper zwischen $a'b'$ und $c'd'$ den Ort dar, an welchen sich das Wasser, welches vorher den Raum $k\varphi(x+k'')$ ausfüllte, dann befinden würde, wenn die Erhebung des Bodens um a wirklich erfolgt wäre.

7) Man betrachte p als den Schwerpunkt des Körpers $k\varphi(x+k'')$, und bezeichne den Abstand von p bis auf φx mit k' so ist $k' < k$ und wird zu o, wenn $k = o$ wird. Ferner betrachte man p' als den Schwerpunkt des Körpers zwischen den parallelen horizontalen Ebenen, welche durch $a'b'$ und $c'd'$ zu denken sind, so ist, insofern man sich die Gewichte aller Wasserpunkte des Körpers $k\varphi(x+k'')$, vor der Erhebung in der durch p zu denkenden horizontalen Durchschnitts-Ebene $\varphi(x+k')$; nach der Erhebung aber in der durch p' zu denkenden horizontalen Ebene vereint denken kann, der Abstand dieser Ebenen, oder die lothrechte Entfernung der Punkte p und p' das, was w (siehe 4) bezeichnet, und der Körper zwischen den Ebenen durch p und p' muß nach §. 2 $= Aa$ sein. Es fällt aber der Inhalt dieses Körpers zwischen $w\varphi(x+k')$ und $w\varphi(x+k'+w)$; bezeichnet daher w' eine Linie größer wie Null und kleiner wie w, so muß es einen Werth für w' geben, so groß, daß $w\varphi(x+k'+w')$ dem Inhalt dieses Körpers gleich ist, und man hat also die Gleichung

$$Aa = w\varphi(x+k'+w'); \text{ oder}$$

$$\text{II. } \frac{w}{a} = \frac{A}{\varphi(x+k'+w')}.$$

8) Setzt man die in I und II für $\frac{w}{a}$ dargestellten Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$\text{III. } \frac{F'x + \frac{k}{2}F''x + \ldots.}{\gamma\varphi(x+k'')} = \frac{A}{\varphi(x+k'+w')}$$

und hieraus, für $k = 0$ und $a = 0$; also auch $k'' = 0$; $k' = 0$; $w = 0$ und $w' = 0$;

$$\text{IV.} \quad \frac{F'x}{\gamma \varphi x} = \frac{A}{\varphi x}.$$

9) Aus der Gleichung IV folgt

$$F'x = A\gamma$$

und aus dieser

$$Fx = \int A\gamma = A\gamma x + C.$$

Es verschwinden aber x und Fx zugleich und folglich ist $C = 0$; daher also

$$Fx = A\gamma x$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 5.

Lehrsatz.

Wenn irgend eine Ebene vom Quadrat-Inhalt E in irgend einer geneigten Lage, dem Druck eines stillstehenden Wassers ausgesetzt ist, und man versteht unter h den verticalen Abstand vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkt von E, so ist, wenn P diesen Druck normal auf E verstanden, bezeichnet,

$$P = E h \gamma.$$

Beweis.

1) Man denke sich durch das Wasser eine Vertical-Ebene V so gelegt, daß dieselbe E normal durchschneidet, nehme die Durchschnittslinie l von V und E als Abscissenlinie, und den Durchschnittspunkt von l mit der nöthigenfalls verbreitet zu denkenden Ebene des Wasserspiegels als Anfangspunkt der Abscissen an. In *Fig.* 2 stelle die Ebene

des Papieres die Vertical-Ebene V vor; cd die Durchschnittslinie des ebenen horizontalen Wasserspiegels mit V; be die Linie l; b den Durchschnittspunkt von l mit der Ebene des Wasserspiegels; g den Durchschnittspunkt der die Ebene E begränzenden Curen mit l; bi eine beliebige Abscisse x, und y bezeichne die zu x gehörige rechtwinklichte, also horizontale, quer durch die Ebene E gehende Ordinate. In *Fig.* 3 ist die Ebene E in ihrer beliebig zu denkenden Begränzung dargestellt; in ihr sei $mn = y$; die Ebene $mgn = \varphi x = \int y$; die übrigen Buchstaben in *Fig.* 3 correspondiren mit denen in *Fig.* 2.

2) Man setze den Normaldruck welchen φx vom Wasser auszuhalten hat $= Fx$; die Entfernung des Schwerpunkts der Ebene φx vom Wasserspiegel $= fx$; den Neigungswinkel der Linie l gegen die Verticallinie $= \alpha$ und den durch i zu denkenden horizontalen Querschnitt des Wassers $= \psi(x \operatorname{Cos} \alpha)$. Stellt man sich nun x um $ip = k$ gewachsen vor, durch p die Linie qr parallel mit mn gezogen, so ist die Ebene $mnqr = \varphi(x+k) - \varphi x$, der Normaldruck des Wassers auf dieselbe $= F(x+k) - Fx$; und der durch p zu denkende horizontale Querschnitt des Wassers $= \psi[(x+k) \operatorname{Cos} \alpha]$.

3) Betrachtet man nun die Ebene $\varphi(x+k) - \varphi x$ als gewichtlos und ohne alle Verbindung mit der übrigen des Wasser begränzenden Wand, dafür aber durch eine normale, dem Druck des Wassers auf dieselbe gleiche, Gegenkraft $F(x+k) - Fx$ in ihrer Lage erhalten, so hat man zwei im Gleichgewicht sich erhaltende Kräfte, nemlich diese Gegen-

kraft, und den normalen Druck des Wassers auf $\varphi(x+k)-\varphi x$, und wollte man nun annehmen, daß, durch eine der Gegenkraft zu Hülfe kommende Thätigkeit, die Ebene $\varphi(x+k)-\varphi x$ um den Weg v parallel mit sich selbst, ins Wasser gedrängt würde, jedoch dergestalt, daß das Ausfließen des Wassers verhindert bleibt, so entstehen, wenn M das mechanische Widerstands-Moment des Wassers, und W das Volumen der Erhebung desselben bezeichnet, folgende zwei Gleichungen

$$\text{I.}\quad [F(x+k)-Fx]v = M$$

$$\text{II.}\quad [\varphi(x+k)-\varphi x]v = W$$

von welchen die erste nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten; die zweite aber nach §. 2 gebildet ist.

Durch Division entsteht aus beiden Gleichungen, wenn man zugleich die teylorsche Reihe anwendet, und dann durch k dividirt,

$$\text{III.}\quad \frac{F'x+\frac{k}{2}F''x+\ldots}{\varphi'x+\frac{k}{2}\varphi''x+\ldots} = \frac{M}{W}.$$

4) Man nehme, normal auf φx, ins Wasser hinein ii' und pp', jede der beiden Linien $= v$, und denke sich durch p' eine horizontale Ebene durchs Wasser, welche l in t, in der Figur unterhalb p, schneiden mag, so wird, wenn p' tiefer wie p liegt, die über der horizontalen Ebene durch p', zunächst liegende Wasserschicht die tiefste sein, in welcher sich Wasser-Elemente erheben müssen, wenn der Wasser-Raum $[\varphi(x+k)-\varphi x]v$ verdrängt wird; liegt aber p' höher wie p, (welcher Fall dann ein-

tritt, wenn der Winkel dbe stumpf ist,) so beginnt die Erhebung in der Wasserschicht welche auf der Ebene $\psi[(x+k)\,\mathrm{Cos}\,\alpha]$ liegt, so daß also die Entfernung vom Wasserspiegel bis zu der Ebene in welcher die Erhebung beginnt, immer zwischen $(x+k)\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ und $[x+k+v\,\mathrm{tang.}\,\alpha]\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ fallen muß, und also, wenn v' eine Größe bezeichnet, welche größer wie Null ist, auch größer wie v sein kann, aber mit v zugleich verschwindet, durch $(x+k+v')$ $\mathrm{Cos}\,\alpha$ ausgedrückt werden kann; die Größe der Ebene selbst folglich $=\psi[(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha]$ ist. Nach §. 4 ist aber der verticale Druck des Wassers oberhalb der Ebene $\psi[(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha]$ auf diese Ebene also der Widerstand gegen die Erhebung

$$=\psi[(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha]\,.\,(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,.\,\gamma$$

und bezeichnet a die der Größe von v entsprechende Erhebung dieser Ebene, so folgt

$$M=a\psi[(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha]\,(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,.\,\gamma.$$

5) Das Volumen der Erhebung der Wasser-Elemente in der tiefsten sich erhebenden Schicht, ist von den horizontalen Ebenen $\psi[(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha]$ und $\psi[(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha-a]$ begränzt, und hat die Höhe a; es muß daher wenn a' eine zwischen o und a fallende Größe bezeichnet, einen Werth für a' geben, für welchen $a\psi[(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha-a']$ dieses Volumen ausdrückt, und man hat folglich

$$W=a\psi[(x+k+v')\,\mathrm{Cos}\,\alpha-a'].$$

6) Setzt man die in 4 und 5; für M und W dargestellten Ausdrücke in die Gleichung III, so entsteht

$$\frac{F'x+\frac{k}{2}F''x+..}{\varphi'x+\frac{k}{2}\varphi''x+..}=\frac{\psi[(x+k+v')\mathrm{Cos}\,\alpha](x+k+v')\mathrm{Cos}\,\alpha\gamma}{\psi[(x+k+v')\mathrm{Cos}\,\alpha-a']}$$

und nimmt man nun $v=o$; also auch $v'=o$; $a=o$; $a'=o$, so ergiebt sich

$$\frac{F'x+\frac{k}{2}F''x+\ldots.}{\varphi'x+\frac{k}{2}\varphi''x+\ldots.}=(x+k)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,.\,\gamma$$

und hieraus, wenn man nun auch $k=o$ setzt,

$$\frac{F'x}{\varphi'x}=x\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,.\,\gamma \text{ oder:}$$

$$\text{IV.}\quad F'x=x\varphi'x\,.\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,.\,\gamma.$$

7) Durch b denke man sich, normal auf V eine Linie, und bezeichne die Entfernung des Schwerpunkts der Ebene φx von dieser Linie mit z; so ist nach der Lehre vom Schwerpunkt $z=\frac{\int x\,.\,y\,dx+C}{\varphi x}$ oder, $\varphi'x$ für y gesetzt, $z\varphi x=\int x\varphi'x+C$; daher $d(z\varphi x)=x\varphi'x$, und substituirt man diesen Werth in IV so entsteht

$$\text{V.}\quad F'x=d(z\varphi x)\,.\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,.\,\gamma.$$

Integrirt man nun die Gleichung V; so ergiebt sich

$$Fx=z\varphi x\,.\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\alpha+C$$

oder, da φx und Fx zugleich verschwinden, so daß also keine Const. hinzukommt

$$Fx=z\varphi x\,.\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,.\,\gamma.$$

Es ist aber $z\,\mathrm{Cos}\,\alpha=fx$ und also

$$\text{VI.}\quad Fx=\varphi x\,.\,fx\,.\,\gamma.$$

8) Für denjenigen Werth des x, für welchen $\varphi x=E$ wird, wird $fx=h$; $Fx=P$, und es ist daher

$$P=E\,.\,h\,.\,\gamma,$$

wie zu beweisen war.

§. 6.

Lehrsatz.

Wenn zwei beliebig gestaltete an Weite noch so sehr verschiedene Röhren mit einander communiciren, so steht, wenn in die Verbindung Wasser gegossen und in Ruhe getreten ist, der Wasserspiegel in beiden Röhren gleich hoch.

Beweis.

Man denke sich irgendwo, etwa an der Stelle ab (*Fig.* 4.) eine Ebene vom Quadrat-Inhalt A angebracht, so wird dieselbe, wenn Gleichgewicht zwischen den Wasserpressungen statt findet, und man denkt sich die Ebene A ohne Gewicht, in ihrer Lage stehen bleiben. Setzt man nun die Entfernung vom Schwerpunkt der Ebene A bis zum Wasserspiegel in der einen Röhre $= H$; die bis zum Wasserspiegel in der andern $= h$; so ist der Normaldruck auf A von der einen Seite her $= AH\gamma$; von der andern aber $= Ah\gamma$; folglich $AH\gamma = Ah\gamma$ und also $H = h$, wie zu beweisen war.

§. 7.

Lehrsatz.

Wenn eine Ebene vom Quadrat-Inhalt E dem Druck eines stillstehenden Wassers ausgesetzt ist, und es bezeichnet P den Normaldruck des Wassers auf E; H die Entfernung vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkt von E; α den Neigungswinkel der Ebene E gegen die Horizontal-Ebene; A die verticale und B die horizontale Projections-Ebene

zu E, so ist der aus P entspringende horizontale Druck oder $P' = A \,.\, H\gamma$, und der verticale oder $P'' = BH\gamma$ d. h. es ist P' gleich dem Normaldruck, welchen A, erleiden würde, wenn das Wasser die Ebene A unmittelbar berührte; und P'' ist gleich dem Gewicht des über E stehenden Wassers.

Beweis.

Es ist nach §. 5; $P = E \,.\, H\gamma$, und zerlegt man P in eine horizontale Wirkung P' und eine verticale P''; so ist nach dem Parallelogram der Kräfte $P' = P \operatorname{Sin} \alpha$; und $P'' = P \operatorname{Cos} \alpha$; oder

$$P' = EH\gamma \operatorname{Sin} \alpha \text{ und}$$
$$P'' = EH\gamma \operatorname{Cos} \alpha.$$

Nun ist aber, nach der Projectionslehre $E \operatorname{Sin} \alpha = A$; $E \operatorname{Cos} \alpha = B$ und folglich

$$P' = AH\gamma$$
$$P'' = BH\gamma.$$

§. 8.

Lehrsatz.

In irgend einer dem Druck vom stillstehenden Wasser ausgesetzten Ebene E sei ab eine beliebige Linie (*Fig.* 5) cfg irgend eine Curve; cg =|= ab; der Abstand beider Linien $= x$; der Normaldruck des Wassers auf die Ebene $cfg = fx$; das statische Moment dieses Drucks in Beziehung auf $ab = Fx$; man soll beweisen, daß

$$Fx = \int x f'x \text{ ist.}$$

Beweis.

Denkt man sich x um k gewachsen, und durch den Endpunkt von k, nm =|= cg gezogen, so ist der

Normaldruck des Wassers auf cgnm $= f(x+k) - fx$, und der Hebelsarm desselben in Beziehung auf ab größer wie x und kleiner wie $x+k$; bezeichnet also k' eine zwischen o und k liegende Größe so muß es einen Werth für k' geben, dem entsprechend $(x+k')[f(x+k)-fx]$ das Moment dieses Drucks in Beziehung auf ab ausdrückt, also $= F(x+k) - Fx$ ist. Durch Anwendung der taylorschen Reihe entstehet aus dieser Gleichung

$$F'x + \frac{k}{2}F''x + \ldots = (f'x + \frac{k}{2}f''x + \ldots)(x+k')$$

und hieraus, für $k = 0$; also auch $k' = 0$;

$$F'x = x \,.\, f'x; \text{ folglich}$$
$$Fx = \int x \,.\, fx.$$

Aufgaben

zur Anwendung der Gesetze dieses ersten Kapitels.

§. 9.

Aufgabe.

Wie verhält sich in einem mit Wasser angefüllten, auf einer horizontalen Ebene stehenden Cubus, der Druck des Wassers auf dem Boden zu dem Normaldruck desselben auf die 4 verticalen Seitenwände?

Auflösung.

Ist die Seite des Cubus $= a$; so ist die Grund-Ebene $= a^2$; die Höhe des Wassers über

derselben $= a$; also der Druck P auf dem Boden $= a^2 . a . \gamma$ oder $P = a^3 . \gamma$ §. 4.

Ferner ist jede Seiten-Ebene $= a^2$; die Entfernung ihres Schwerpunktes vom Wasserspiegel $= \frac{1}{2}a$; folglich der Druck auf jede der 4 Seitenwände $= \frac{1}{2}a . a^2\gamma$; §. 5; daher der Normaldruck auf alle viere, oder

$$Q = 4 . \tfrac{1}{2}a . a^2\gamma = 2a^3\gamma,$$

folglich $P : Q = 1 : 2$.

§. 10.

Aufgabe.

Wie verhält sich in einem mit Wasser angefüllten auf einer horizontalen Ebene stehenden abgekürzten Kegel der Druck auf dem Boden zu dem Gewicht des Wassers im Gefäß?

Auflösung.

Der Halbmesser der unteren Grund-Ebene sei $= r$; der der obern $= \varrho$; die Höhe $= h$; so ist der Druck auf den Boden oder $P = r^2\pi . h . \gamma$.

Ferner der Cubic-Inhalt des Wassers im Kegel $= \frac{1}{3}\pi h(r^2 + \varrho^2 + r\varrho)$ also das Gewicht desselben oder

$$W = \tfrac{1}{3}\pi h(r^2 + \varrho^2 + r\varrho)\gamma; \text{ daher}$$

$$P : W = 3r^2 : r^2 + \varrho^2 + r\varrho.$$

Beispiele.

1) Für $r = \varrho$; entsteht:

$$P : W = 1 : 1 \text{ oder } P = W.$$

2) Für $\varrho = \frac{1}{4}r$ entsteht:

$$P : W = 16 : 7.$$

3) Für $r = \frac{1}{7}\varrho$ entsteht:

$$P : W = 3 : 31.$$

§. 11.

Aufgabe.

In 2 communicirenden Röhren steht das Wasser in der einen um h Fuß höher als in der anderen. Wie groß muß das auf die niedrigere zu legende (luftdicht schließende) Gewicht x sein, damit Gleichgewicht statt findet?

Auflösung.

Ist A (*Fig.* 6) der Querschnitt der Oberfläche des Wassers in der Berührungsstelle mit x, so würde Gleichgewicht statt finden, wenn die niedrigere Röhre noch um h Fuß erhöhet, x weggenommen, und dieser Röhrenzusatz mit Wasser gefüllt würde. Dann wäre aber der auf A sich äußernde lothrecht herab würkende Druck $= Ah\gamma$ und dieser muß, wenn der Röhrenzusatz nicht angebracht ist, durch x ersetzt werden. Man hat also

$$x = Ah\gamma.$$

§. 12.

Aufgabe.

In 2 communicirenden, mit Wasser gefüllten Röhren von den Querschnitten a, b steht in der ersteren das Wasser um h Fuß höher als in der zweiten; in jener werde das Wasser vermittelst eines Kolben durch eine Gewalt P in dieser durch eine Kraft Q nieder gepreßt. Man soll die Be-

dingung des Gleichgewicht zwischen beiden Kräften P, Q durch eine Gleichung darstellen. (*Fig.* 7.)

Auflösung.

Man denke sich P weggenommen, und dafür die Röhre in welcher P wirkt, um so viel erhöht und voll Wasser gegossen, daß der Druck dieses Wassers auf den Querschnitt, wo jetzt der Kolben zu P, das Wasser berührt = P wird. Setzt man diese Höhe = y; so ergiebt sich y aus der Gleichung

$$ay \cdot \gamma = P; \text{ nemlich}$$

$$y = \frac{P}{a\gamma}$$

und nun folgt ganz nach dem vorigen §.

$$Q = (y + h)\, b\gamma; \text{ oder}$$

$$Q = bh\gamma + \frac{b}{a} P.$$

§. 13.

Zusatz.

Durch eine Vorrichtung wie die in §. 12, lassen sich durch geringe Kräfte ungemein große Widerstände überwinden. Es stelle z. B. (*Fig.* 8) eine zusammengesetzte Hydrostatische Presse dar; a, b, e, f bezeichnen die Querschnitte der Kolben; h, H die Wasserhöhen; c, d die Arme des Hebels; P die Kraft welche auf a wirkt, so ist die Gewalt, mit welche der Kolben in b nach oben gepreßt wird, oder

$$Q = bh\gamma + \frac{b}{a} P;$$

folglich die Kraft R, mit welcher (immer, ohne die Neben-Hindernisse zu berücksichtigen) der Kolben bei e herunter gedrückt wird, oder

$$R = \frac{c}{d}(bh\gamma + \frac{b}{a}P)$$

und also die Gewalt x mit welcher der Kolben bei f nach oben gepreßt wird, oder

$$x = fH\gamma + \frac{f}{e} \cdot \frac{c}{d}(bh\gamma + \frac{b}{a}P).$$

Ist etwa P = 30 ℔; a = 1 Q″; b = 64 Q″; h = 20 Fuß; c = 4′; d = 15″; e = 1 Q″; f = 64 Q″; H = 15′; so findet man

$$x = 513805\tfrac{1}{3} \text{ ℔}.$$

§. 14.

Aufgabe.

Den Druck auf einen Schleusen-Boden, von unten nach oben zu bestimmen, wenn das Oberwasser durch die Spundwände unter den Boden gedrungen ist.

Auflösung.

Ist A der Quadrat-Inhalt des gedrückten Schleusen Bodens; h der verticale Abstand vom Wasserspiegel des Oberwassers bis zum Wasserspiegel in der Schleusenkammer, so ist der gesuchte Druck $= Ah\gamma$. Sind z. B. die Grundpfähle, auf welchen der Schleusen-Boden befestigt ist, $3\frac{1}{2}$′ auseinander, so daß jeder Pfahl eine Ebene von $(3\frac{1}{2})^2$ Quadratfuß zu halten hat, und beträgt h = 10′; so ist, wenn das Wasser unter den Boden gedrun-

gen ist, die Gewalt, welche jeder Pfahl auszuhalten hat, welche ihn also auszureißen strebt,

$$= \tfrac{49}{4} \cdot 10 \cdot 66 = 8085 \text{ ℔.}$$

§. 15.

Aufgabe.

Wie hoch muß das Wasser in eine Schleusenkammer gelassen werden, damit das Ober- und Unter-Thor gleichen Druck erleiden.

Auflösung.

Die Höhe des Oberwassers sei $= a$; die des Unterwassers $= c$; die, der Ueberlaßschwelle über den Boden $= b$; die gesuchte Höhe $= x$; die Breite der Thore $= B$; so ist der Druck des Wassers aufs Oberthor von außen nach innen $= aB \cdot \frac{a}{2}\gamma$; und der Gegendruck auf dasselbe $= (x-b)B\frac{x-b}{2}\gamma$. Eben so der Druck aufs Unterthor $= xB \cdot \frac{x}{2}\gamma$ und der Gegendruck $= cB \cdot \frac{c}{2}\gamma$. Die Bedingungs-Gleichung ist demnach

$$aB \cdot \frac{a}{2}\gamma - (x-b)B \cdot \frac{x-b}{2}\gamma = xB \cdot \frac{x}{2}\gamma - cB \cdot \frac{c}{2}\gamma$$

oder

$$a^2 - (x-b)^2 = x^2 - c^2$$

folglich

$$x = \frac{b + \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}.$$

Ist etwa $a = 9'$; $b = c = 4'$; so findet man $x = 8{,}67$.

§. 16.

Aufgabe.

In einem Schleusenthor sei ein Schoßthürchen von b Fuß Höhe und a Fuß Breite; die horizontale Oberkante desselben befinde sich h Fuß unterm Wasserspiegel; das Thürchen ist durch eine Kette oder Stange mit einem Hebel verbunden und an denselben sei der Hebelarm des Widerstandes mit dem das Thürchen dem Aufziehen desselben entgegen wirkt $= c$; der der Kraft P aber $= d$; wie groß muß P sein, damit bei einer geringen Vermehrung des gefundenen Werths für P das Indie-Höhegehen des Thürchen erfolgt?

Auflösung.

Der Normaldruck womit das Wasser das Thürchen in seinen Fugen anpreßt ist

$$= ab.\left(h + \frac{b}{2}\right)\gamma$$

folglich der Widerstand gegen das Erheben, wenn μ den Reibungs-Coefficienten ausdrückt

$$= \mu ab\left(h + \frac{b}{2}\right).\gamma$$

und daher, ohne Rücksicht auf das Gewicht des Thürchens, der Kette oder Stange und der Reibung in der Drehachse des Hebels

$$P.d = c.\mu ab\left(h + \frac{b}{2}\right).\gamma;$$

folglich

$$P = \mu abc\gamma.\frac{2h + b}{2d}.$$

Für $a = 2$; $b = 2$; $h = 6$; $c = 1$; $d = 8$; $\mu = \frac{1}{3}$ erhält man

$$P = 77 \text{ ℔}.$$

§. 17.

Aufgabe.

Das Moment des Wasserdrucks auf ein, in einer verticalen, vom Wasser berührten Wand, befindliches Rechteck, dessen horizontalen Seiten $= b$ und dessen verticale $= h$ sind, in Beziehung auf die untere Breite b desselben zu bestimmen, unter der Voraussetzung daß das Wasser über dieser Drehachse H Fuß hoch stehe.

Auflösung.

Nach §. 8, hat man hier

$$fx = bx.(H - \tfrac{1}{2}x)\gamma; \text{ also}$$
$$f'x = b\gamma(H - x); \text{ folglich}$$
$$Fx = b\gamma\int x(H - x)$$
$$= b\gamma(\tfrac{1}{2}Hx^2 - \tfrac{1}{3}x^2)$$
$$= \tfrac{1}{6}bx^2\gamma(3H - 2x)$$

und also

$$Fh = \tfrac{1}{6}bh^2\gamma(3H - 2h)$$

folglich für $h = H$

$$Fh = \tfrac{1}{6}bh^3\gamma.$$

Für diesen letzten Fall ist aber der Druck selbst

$$= bh.\frac{h}{2}\gamma;$$

folglich der Hebelsarm

$$= \frac{\frac{1}{6}bh^3\gamma}{bh.\frac{1}{2}h\gamma} = \tfrac{1}{3}h.$$

§. 18.

Aufgabe.

In einer dem Druck des Wassers ausgesetzten unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene, das Moment des Wasserdrucks auf ein in dieser Ebene befindliches Dreieck in Beziehung auf eine seiner Seiten a zu bestimmen.

Auflösung.

1) Es sei bcrt (*Fig.* 10) die dem Wasserdruck ausgesetzte Ebene, bc $=\!|\!=$ rt horizontal; rt die Durchschnittslinie des Wasserspiegels mit dieser Ebene; deg das Dreieck in derselben; de $=$ a; die Normale von g auf de gleich h, der Neigungswinkel von ed gegen bc $= \beta$; die Höhe des Wasserspiegels über d $=$ H; $<$ edg $= \varrho$; als Hülfsgröße sei auch noch $<$ ged durch δ ausgedrückt; nm sei $=\!|\!=$ a; und der Normal-Abstand beider Linie sei $=$ x; p bezeichne den Schwerpunkt des Trapezes ednm; z die Normale pq aus p auf a; die zugehörige Abscisse qd heiße y; pw sei normal auf bc; qv normal auf pw; fx bezeichne den normalen Wasserdruck auf ednm; Fx das Moment desselben in Beziehung auf a.

2) Es ist die Entfernung von p bis zum Wasserspiegel $= \mathrm{H} - \mathrm{pw}\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; die Ebene des Trapezes edmn $= \frac{\mathrm{a}+\mathrm{nm}}{2}.\mathrm{x}$; also

$$\mathrm{fx} = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{nm}}{2}\mathrm{x}.\,(\mathrm{H} - \mathrm{pw}\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\gamma$$

Es ergiebt sich aber nm aus der Proportion

$h-x : nm = h : a$; nemlich $nm = \frac{a(h-x)}{h}$;

Ferner ist $pw = pv + vw = z \operatorname{Cos}\beta + y \operatorname{Sin}\beta$; daher

$$fx = \frac{a\gamma}{2h}(2hx - x^2)(H - z \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta - y \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta).$$

3) Aus der Gleichung

$$\triangle end. \frac{x}{3} + \triangle nmd. \tfrac{2}{3}x = nmed. z; \text{ oder}$$

$$\frac{ax}{2}.\frac{x}{3} + \frac{a(h-x)}{h}.\frac{x}{2}.\tfrac{2}{3}x = a.\frac{2h-x}{2h}x.z;$$

folgt $$z = \frac{3hx - 2x^2}{3(2h-x)};$$

und, nimmt man die Momente in Beziehung auf eine aus d mit h parallele Linie, so folgt aus der entstehenden Gleichung

$$\tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{Cotg}\varrho . \tfrac{2}{3}x \operatorname{Cotg}\varrho + nm.x.(\tfrac{1}{2}nm + x \operatorname{Cotg}\varrho) + \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{Cotg}\delta.(\tfrac{1}{3}x \operatorname{Cotg}\delta + nm + x \operatorname{Cotg}\varrho) =$$

$enmd.y$; wenn man die Werthe für nm und $enmd$ substituirt, weil

$$h \operatorname{Cotg}\varrho + h \operatorname{Cotg}\delta = a \text{ ist;}$$

$$y = \frac{(a - 2h \operatorname{Cotg}\varrho)x^2 - 3h(a - h \operatorname{Cotg}\varrho)x + 3ah^2}{3h(2h-x)}$$

4) Setzt man die Werthe für z und y in die Formel, welche fx ausdrückt, so erhält man

$$fx = \frac{a\gamma}{6h}\left[\left(\frac{2h\operatorname{Sin}(\beta+\varrho)}{\operatorname{Sin}\varrho}\operatorname{Sin}\alpha - a\operatorname{Sn}\beta\operatorname{S}\alpha\right)\frac{x^3}{h} + 3\left(a\operatorname{Sin}\beta\operatorname{S}\alpha - \frac{h\operatorname{Sin}(\beta+\varrho)}{\operatorname{Sin}\varrho}\operatorname{Sin}\alpha - H\right)x^2 + 3h(2H - a\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta)x\right].$$

Fällt man nun aus e und g Normalen auf bc und Normalen auf die Horizontal-Ebene, setzt

erstere = B'; A'; letztere = B; A; so ist gd $= \frac{h}{\text{Sin}\,\varrho}$;

$A' = \frac{h}{\text{Sin}\,\varrho}\text{Sin}(\beta+\varrho)$; $B' = a\,\text{Sin}\,\beta$; $B = a\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\alpha$;

$A = \frac{h}{\text{Sin}\,\varrho}\,\text{Sin}\,(\beta+\varrho)\,\text{Sin}\,\alpha$; folglich, wenn man diese Werthe nimmt;

$$fx = \frac{a\gamma}{6h}\left[(2A-B)\frac{x^3}{h} - 3(H+A-B)x^2 + 3h(2H-B)x\right]$$

daher:

$$xf'x = \frac{a\gamma}{6h}\left[\frac{2A-B}{h}.3x^3 - 6(H+A-B)x^2 + 3h(2H-B)x\right]$$

5) Nach §. 8 ist $Fx = \int xf'x$; folglich

$$Fx = \frac{a\gamma}{6h}\left[\frac{2A-B}{h}.\tfrac{3}{4}x^4 - 2(H+A-B).x^3 + \tfrac{3}{2}h(2H-B)x^2\right]$$

$$= \frac{a\gamma x^2}{24h}\left[\frac{2A-B}{h}.3x^2 - 8(H+A-B)x + 6h(2H-B)\right]$$

und hieraus, für $x = h$;

$$Fh = \frac{ah^2\gamma}{24}(4H - 2A - B)$$

§. 19.

Zusatz.

Nach der Lehre vom Schwerpunkt ist die Normale vom Schwerpunkt des Dreiecks deg auf die Horizontal-Ebene $lbc = \frac{A+B+o}{3} = \frac{A+B}{3}$; also die Entfernung desselben vom Wasserspiegel $= H - \frac{A+B}{3}$

$$= \frac{3H-A-B}{3};$$

die gedrückte Ebene ist $=\frac{ah}{2}$; folglich der Normaldruck

$$=\frac{ah}{2}.\gamma\frac{3H-A-B}{3}$$

und daher der Hebelsarm desselben in Beziehung auf a

$$=\frac{ah^2\gamma(4H-2A-B)}{4ah\gamma(3H-A-B)}$$

$$=\frac{h}{4}.\frac{4H-2A-B}{3H-A-B}.$$

Für $A=H$; d. h. wenn das Dreieck mit seiner höchsten Ecke im Wasserspiegel liegt, ist also der Hebelsarm immer, für jede Lage $=\frac{1}{4}h$.

§. 20.

Aufgabe.

In einer dem Druck des Wassers ausgesetzten, unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene, das Moment des Wasserdrucks auf einen in dieser Ebene befindlichen Kreis in Beziehung auf eine seiner Tangenten zu bestimmen.

Auflösung.

1) Es sei brtc (*Fig.* 11) die dem Wasserdruck ausgesetzte Ebene; bc=|=rt horizontal; rt die Durchschnittslinie des Wasserspiegels mit dieser Ebene; die in ihr liegende Kreis-Ebene berühre bc in a; m sei ihr Mittelpunkt, und die Entfernung dieses Punktes m vom Wasserspiegel $=h$; der Halbmesser des Kreises sei $=r$; vq die denselben in f berührende Tangente auf welche die Momente be-

zogen werden; β ihr Neigungswinkel gegen bc. Man nehme irgend eine Sehne gk =|= qv; ziehe mf, mg, mk und setze den zum Halbmesser = 1 gehörigen Bogen der Winkel gmf = kmf gleich δ; p sei der Schwerpunkt des Kreis-Abschnitts gkf; pw horizontal, also normal auf ma, und $F\delta$ bezeichne das Moment des Wasserdrucks auf den Abschnitt gkf in Beziehung auf qv, so ist

$$F\delta = \int ef.\, d \text{ (des Drucks auf gkf).}$$

2) Es ist die Ebene gkf

$$= r^2(\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta);$$

$$mp = \tfrac{2}{3}r.\frac{\mathrm{Sin}\,\delta^3}{\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta};$$

$$\angle\, fma = 180 - \beta; \text{ und also}$$

$$mw = mp\,\mathrm{Cos}(180 - \beta)$$

$$= -mp\,\mathrm{Cos}\,\beta$$

$$= -\tfrac{2}{3}r\frac{\mathrm{Sin}\,\delta^3}{\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta}.\mathrm{Cos}\,\beta.$$

Ferner die Entfernung von p bis zum Wasserspiegel $= h + mw\,\mathrm{Sin}\,\alpha$

$$= h - \tfrac{2}{3}r.\frac{\mathrm{Sin}\,\delta^3}{\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta}.\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\alpha;$$

also der Normaldruck auf gkf

$$= r^2(\delta - \mathrm{Sin}\delta\mathrm{Cos}\delta)\left(h - \tfrac{2}{3}r.\frac{\mathrm{Sin}\,\delta^3}{\delta - \mathrm{Sin}\delta\mathrm{Cos}\delta}.\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Sn}\alpha\right).\gamma$$

$$= r^2\gamma\,[h(\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta) - \tfrac{2}{3}r\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\delta^3];$$

folglich die erste Ableitung desselben

$$= r^2\gamma(2h\,\mathrm{Sin}\,\delta^2 - 2r\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\delta^2.\,\mathrm{Cos}\,\delta);$$

und $ef = r - r\,\mathrm{Cos}\,\delta$; demnach

$$F\delta = 2r^3\gamma\int(1 - \mathrm{Cos}\,\delta)(h\,\mathrm{Sin}\delta^2 - r\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta\,\mathrm{Sn}\delta^2\,\mathrm{Cos}\delta)$$

$$= 2r^3\gamma.$$

$$= 2r^3\gamma . \left\{ \begin{array}{l} +(h + r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta) \int \operatorname{Sin}\delta^2 \\ -(h + r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta) \int \operatorname{Sin}\delta^2 \operatorname{Cos}\delta \\ - r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta \int \operatorname{Sin}\delta^4 \end{array} \right\}.$$

Es ist aber $\int \operatorname{Sin}\delta^2 = \frac{1}{2}(\delta - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta)$;

$$\int \operatorname{Sin}\delta^2 \operatorname{Cos}\delta = \tfrac{1}{3} \operatorname{Sin}\delta^3 ;$$

$$\int \operatorname{Sin}\delta^4 = -\tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}\delta^3 \operatorname{Cos}\delta + \tfrac{3}{4} \int \operatorname{Sin}\delta^2$$

$$= -\tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}\delta^3 \operatorname{Cos}\delta + \tfrac{3}{8}(\delta - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta)$$

folglich

$$F\delta = 2r^3\gamma \left\{ \begin{array}{l} (h + \frac{1}{4} r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta) \frac{1}{2}(\delta - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta) \\ -(h + r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta) \frac{1}{3} \operatorname{Sin}\delta^3 \\ + \frac{1}{4} r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\delta^3 \operatorname{Cos}\delta \end{array} \right\} + C.$$

3) Für $\delta = 0$ verschwindet das Moment und der Ausdruck dafür, so daß also keine Const. hinzukommt; und es ist daher

$$F\delta = \frac{r^3\gamma}{12} [3(4h + r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta)(\delta - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta) - 8(h + r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta) \operatorname{Sin}\delta^3 + 6 r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\delta^3 \operatorname{Cos}\delta].$$

4) Setzt man nun $\delta = \pi$; so hat man das Moment des Wasserdrucks auf die ganze Kreis-Ebene, oder

$$F\pi = \frac{r^3\pi\gamma}{4} . (4h + r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta).$$

5) Setzt man aber $\delta = \frac{1}{2}\pi$, so entsteht

$$F\frac{\pi}{2} = \frac{r^3\gamma}{24} [4h(3\pi - 4) - (16 - 3\pi) r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta].$$

§. 21.

Zusatz.

Für $\beta = 90^0$; wird

$$F\pi = r^3\pi\gamma . h = r^2\pi . h . \gamma . r$$

so daß also der Hebelsarm $= r$ ist; und

$$F\frac{\pi}{2} = \frac{r^3\gamma}{6}.h(3\pi - 4)$$
$$= \tfrac{1}{2}r^2\pi h\gamma.\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)r$$

so daß also der Endpunkt des Hebelsarms $\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)r$ ebenfalls im Schwerpunkt der Ebene liegt.

Für $\beta = 180°$ ist

$$F\pi = \frac{r^3\pi\gamma}{4}(4h - r\,\mathrm{Sin}\,\alpha)$$

also für $\alpha = 90°$;

$$F\pi = \frac{r^3\pi\gamma}{4}.(4h - r)$$
$$= r^2\pi h\gamma\left(1 - \frac{r}{4h}\right)r$$

und wenn $h = r$ ist;

$$F\pi = r^2\pi.r\gamma.\tfrac{3}{4}r$$

so daß also der Hebelsarm für diesen letzten Fall $= \frac{3}{4}r$ ist.

Für $\beta = 180°$; und $\alpha = 0$; wird

$$F\pi = r^3\pi h\gamma = r^2\pi.h.\gamma.r.$$

Für $\beta = 180°$; $h = 0$; $\delta = \frac{1}{2}\pi$; wird

$$F\frac{\pi}{2} = \frac{r^3\gamma}{24}.(16 - 3\pi)r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

und hieraus für $\alpha = 90°$;

$$F\frac{\pi}{2} = \frac{r^2\pi}{2}.\frac{4r}{3\pi}.\gamma.\left(1 - \frac{3\pi}{16}\right).r$$

so daß also für diesen letzten Fall der Hebelsarm $= \left(1 - \frac{3\pi}{16}\right)r$ nahe $= \frac{23}{56}.r$ ist u. s. w. u. s. w.

§. 22.

Aufgabe.

Auf einer horizontalen Ebene steht ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, von der Höhe h, welches auf dieselbe Höhe dem Druck des Wassers ausgesetzt ist. Man soll bestimmen:

1) wie breit (y) dasselbe sein muß um vom Druck des Wassers nicht fortgeschoben zu werden.

2) wie breit (x) dasselbe sein muß um vom Druck des Wassers nicht umgeworfen zu werden.

Auflösung.

ad. 1. Die Länge des Parallelepipedums (der Mauer) sei $= l$; (*Fig.* 12) das Gewicht eines Cubicfußes seiner Materie $= p$; der Reibungs-Coefficient $= \mu$; so ist der Reibungs-Widerstand $= \mu h l y . p$; der Druck des Wassers $= hl . \frac{1}{2}h . \gamma$. und es muß also fürs Gleichgewicht

$$\mu h l y p = \tfrac{1}{2} h l h \gamma; \text{ folglich}$$

$$y = \frac{\gamma}{2\mu p} . h \text{ sein.}$$

Ist $\gamma = 66$; $\mu = \frac{1}{3}$; $p = 100$; so erhält man

$$y = 0{,}99 . h \text{ beinahe} = h.$$

ad. 2. Das Moment des Wasserdrucks in Beziehung auf die Umdrehungsachse durch a, ist $= hl . \frac{1}{2}h . \gamma . \frac{1}{3}h$

$$= \tfrac{1}{6} h^3 l \gamma;$$

das Widerstands-Moment vom Gewicht der Mauer aber

$$= h l x p . \tfrac{1}{2} x;$$

fürs Gleichgewicht muß also

$$\tfrac{1}{2}hlpx^2 = \tfrac{1}{6}h^3l\gamma, \text{ folglich}$$

$$x = h.\sqrt{\frac{8}{3p}} \text{ sein.}$$

Ist $\gamma = 66$; $p = 100$; so erhält man $x = 0{,}47.h$ beinahe $= \tfrac{1}{2}h$.

§. 23.

Aufgabe.

Die Mauer habe auf der Seite des Drucks eine m füßige, auf der entgegengesetzten eine n füßige Dossirung; man soll dieselben beiden Fragen wie in §. 22 in Beziehung auf dieselbe beantworten. (*Fig.* 13.)

Auflösung.

ad. 1. Der Wasserdruck ist für die Länge von einen Fuß $= \tfrac{1}{2}h^2\gamma$; das Gewicht der Mauer

$$= \tfrac{1}{2}nh^2p + hyp + \tfrac{1}{2}mh^2p$$

die lothrechte Wirkung des Wassers

$$= \tfrac{1}{2}mh^2\gamma$$

folglich muß fürs Gleichgewicht

$$\tfrac{1}{2}h^2\gamma = \mu(\tfrac{1}{2}nh^2p + hyp + \tfrac{1}{2}mh^2p + \tfrac{1}{2}mh^2\gamma)$$

also

$$y = \frac{\gamma - \mu(np + mp + m\gamma)}{2\mu p}.h \text{ sein.}$$

Ist $\mu = \tfrac{1}{3}$; $n = m = \tfrac{1}{12}$; $p = 100$; $\gamma = 66$; so ergiebt sich

$$y = \tfrac{211}{240}h = 0{,}88.h.$$

ad. 2. Das Moment des Wasserdrucks ist $= \tfrac{1}{6}h^3\gamma$; das des Gewichts der Mauer

$$= \tfrac{1}{2}nh^2 . \tfrac{2}{3}nhp + hxp . \left(nh + \frac{x}{2}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}mh^2p . (nh + x + \tfrac{1}{3}mh)$$

das, der zur Hülfe kommenden lothrechten Wirkung des Wassers

$$= \tfrac{1}{2}mh^2\gamma(nh + x + \tfrac{2}{3}mh);$$

folglich muß fürs Gleichgewicht

$$\tfrac{1}{6}h^3\gamma = \tfrac{1}{3}n^2h^3p + nh^2px + \tfrac{1}{2}hpx^2 + \tfrac{1}{2}nmh^3p$$
$$+ \tfrac{1}{2}mh^2px + \tfrac{1}{6}m^2h^3p + \tfrac{1}{2}nmh^3\gamma + \tfrac{1}{2}mh^2\gamma x$$
$$+ \tfrac{1}{3}m^2h^3\gamma$$ sein.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$x = \frac{h}{2p}\left[-(2n+m)p - m\gamma + \sqrt{\frac{(4n^2-m^2)p^2 + (4-2m^2)p\gamma + 3m^2\gamma^2}{3}}\right]$$

Ist $n = m = \tfrac{1}{12}$; $p = 100$; $\gamma = 66$; so erhält man

$$x = 0{,}318 . h.$$

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewicht des Wassers mit eingesenkten festen Körpern.

---

§. 24.

Lehrsatz.

Ein ins Wasser gesenkter fester Körper wird von einer Kraft lothrecht in die Höhe getrieben, welche dem Gewicht des verdrängten Wassers gleich ist.

Beweis.

Ist das Volumen des von dem Körper verdrängten Wassers $= V$, so ist das Gewicht der verdrängten Wassermasse $= V\gamma$. Ehe nun der Körper ins Wasser gebracht wurde, blieb die Wassermasse an der Stelle, welche jetzt der Körper einnimmt, in derselben, obgleich ihr Gewicht $V\gamma$ sie lothrecht nieder trieb, woraus folgt: daß das umgebende Wasser auf diesen Raum mit einer Gewalt $= V\gamma$ von unten nach oben, vertical, wirkt, welche Einwirkung sich nun auf den an diese Stelle gebrachten Körper äußert.

§. 25.

Zusatz.

Ist also das Volumen eines festen Körpers $= V$; sein specifisches Gewicht $= \beta$; also sein absolutes oder $P = V\beta\gamma$ und wird dieser Körper ganz unter Wasser getaucht, so muß

1) wenn $\beta > 1$ ist, der Körper, wegen des Nebengewichts $P - V\gamma$ ganz zu Boden sinken, oder es muß ihn eine Kraft $= P - V\gamma$ tragen;
2) wenn $\beta = 1$ ist, der Körper an jeder Stelle unter Wasser sich erhalten.
3) wenn $\beta < 1$ ist, der Körper aus dem Wasser sich erheben, und zwar so weit, bis das Gewicht des von seinem untergetauchten Theile, verdrängten Wassers $= P$ oder $= V\beta\gamma$ ist.

Der Körper schwimmt also, wenn $\beta < 1$ ist. Soll ein solcher Körper ganz unter Wasser er-

halten werden, so muß eine noch anzubringende Kraft $= V\gamma - P$ ihn lothrecht nach unten pressen.

§. 26.

Lehrsatz.

Ein schwimmender Körper kann nur dann in Ruhe sein, wenn sein Schwerpunkt mit dem des verdrängten Wassers in eine lothrechte Linie fällt.

Beweis.

Die Wahrheit der Behauptung erhellet daraus, daß zwei parallel einander entgegen wirkende gleiche Kräfte, nur dann im Gleichgewicht sind, wenn ihre Richtungslinien in einander fallen.

§. 27.

Erklärung.

Ist ab (*Fig.* 14) die verticale Linie in welcher die beiden Schwerpunkte, der des schwimmenden ruhenden Körpers, und der des verdrängten Wassers, liegen, und dieser Körper wird durch irgend eine Kraft in eine andere Lage gebracht (etwa nach der Richtung welche der Pfeil in der Figur anzeigt, gedreht) jedoch dergestalt, daß sein untergetauchter Theil noch eben so groß ist, als vorhin, und es nimmt nun ab die Lage a′b′ an, der Schwerpunkt des jetzt verdrängten Wassers liegt aber in c, so heißt der Punkt m in welchem die Linie a′b′ von der durch c gelegten Verticallinie geschnitten wird, das Metacentrum des Körpers für diese neue Lage.

§. 28.

Erklärung.

Unter Stabilität eines schwimmenden ruhenden Körpers, versteht man das Bestreben desselben in diese ruhende Lage wieder zurückzutreten, wenn er durch irgend eine Thätigkeit aus ihr gebracht worden ist.

§. 29.

Lehrsatz.

Ein schwimmender Körper hat nur dann eine Stabilität, wenn sein Schwerpunkt unter dem Metacentrum befindlich ist.

Beweis.

Ist k (*Fig.* 14) der Ort des Schwerpunkts des Körpers in der neuen Lage, und P das Gewicht des schwimmenden Körpers, also auch das des verdrängten Wasserkörpers, so wirkt aus k lothrecht herab eine Kraft = P; aus c lothrecht herauf eine Kraft ebenfalls = P. Sobald nun die durch den Pfeil angedeutete Thätigkeit aufhört zu wirken, so erfolgt diesen bestehenden Kräften P und P entsprechend eine Drehung um den Mittelpunkt n der geraden Linie ck, (siehe 1ster Band §. 55.) nach der dem Pfeil entgegengesetzten Richtung, und der Körper muß folglich (vielleicht nach einigen oder mehreren Schwankungen) wieder in die Lage zurückkommen, in welcher der Schwerpunkt desselben und der des verdrängten Wassers in die verticale Linie ab fallen, d. h. er nimmt seinen anfänglichen Stand (§. 27) wieder ein.

Ist aber r der Ort des Schwerpunkts des Körpers in der neuen Lage, so wirkt aus r lothrecht herab eine Kraft $= P$; aus c lothrecht herauf eine Kraft $= P$; so daß also eine Drehung um den Mittelpunkt t der Linie cr nach der begonnenen Richtung fortgesetzt wird, der Körper also nicht in die erste Lage zurückkehrt, sondern umschlägt.

Fällt der Schwerpunkt in m, so ruht der Körper in der neuen Lage.

§. 30.

Lehrsatz.

Der Gewichtsverlust eines ganz unter Wasser befindlichen festen Körpers ist gleich seinem absoluten Gewicht, dividirt durch sein specifisches.

Beweis.

Das Volumen des Körpers, also auch das des verdrängten Wassers sei $= V$; sein specifisches Gewicht $= \beta$; sein absolutes Gewicht $= P$; sein Gewichtsverlust, oder das Gewicht der Wassermenge V sei $= Q$; so ist

$$P = V\beta\gamma$$

und $Q = V\gamma$; also

$$Q = \frac{P}{\beta}.$$

§. 31.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper, deren specifische Gewichte $= \alpha, \beta$; deren absolute aber $= P, Q$ sind, ohne

Verlust an Volumen zu einer Materie vereint (etwa verschmolzen) sind, und es bezeichnet δ das specifische Gewicht dieser entstandenen Materie, so ist

$$\frac{P}{\alpha}+\frac{Q}{\beta}=\frac{P+Q}{\delta}.$$

Beweis.

Nach dem vorigen §. ist $\frac{P}{\alpha}$ = den Gewichtsverlust des einen Körpers unter Wasser, $\frac{Q}{\beta}$ aber = dem, des andern Körpers, und $\frac{P+Q}{\delta}$ = dem, des entstandenen Körpers; und es drückt also, wenn keine Aenderung des Volumens erfolgt ist, wie vorausgesetzt wird,

$\frac{P}{\alpha}+\frac{Q}{\beta}$ sowohl, als auch $\frac{P+Q}{\delta}$

das Gewicht eines und desselben Wasser-Körpers aus, d. h. es ist

$$\frac{P}{\alpha}+\frac{Q}{\beta}=\frac{P+Q}{\delta}.$$

§. 32.

Zusatz.

1) Ist der Gewichtsverlust des entstandenen Körpers unmittelbar gegeben, etwa = R; so hat man

$$\frac{P}{\alpha}+\frac{Q}{\beta}=R.$$

2) Ist die Summe der Volumen beider Körper, oder, was dasselbe sagt, das Volumen des

entstandenen Körpers unmittelbar gegeben, etwa $= V$, so ist

$$\frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\beta} = V\gamma.$$

Aufgaben

zur Anwendung der Gesetze dieses zweiten Kapitels.

§. 33.

Aufgabe.

Wie tief sinkt eine als homogen angesehene Kugel, deren Halbmesser $= r$ und deren specifisches Gewicht $= \beta$ (< 1) ist, ins Wasser?

Auflösung.

Bezeichnet x die Tiefe der Einsenkung so ist das Volumen des verdrängten Wassers $= \frac{\pi}{3} x^2 (3r - x)$; also das Gewicht desselben $= \frac{\pi}{3} x^2 (3r - x)\gamma$. Nun ist aber das Volumen des schwimmenden Körpers $= \frac{4}{3} r^3 \pi$; folglich sein Gewicht $= \frac{4}{3} r^3 \pi\beta\gamma$; demnach

$$\frac{\pi}{3} x^2 (3r - x)\gamma = \frac{4}{3} r^3 \pi\beta\gamma,$$

und hieraus

$$\left(\frac{x}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 4\beta = 0.$$

Beispiel. Für $\beta = 0{,}316$ entsteht ziemlich genau $\frac{x}{r} = \frac{3}{4}$; also $x = \frac{3}{4} . r$.

§. 34.

Aufgabe.

Aus p ℔ einer Materie, deren specifisches Gewicht $= \beta$ ist, eine hohle Kugel zu bilden, die sich gerade zur Hälfte ins Wasser senkt.

Auflösung.

Setzt man den Halbmesser der vollen Kugel $= x$; den des hohlen Raums $= y$; so ergeben sich, ohne Rücksicht auf das Gewicht der Luft im hohlen Raum der Kugel, sogleich die beiden Bedingungs-Gleichungen

$$1)\quad \tfrac{4}{3}(x^3 - y^3)\,\pi\beta\gamma = p$$

$$2)\quad \tfrac{2}{3}x^3\,\pi\gamma = p$$

und aus ihnen

$$x = \sqrt[3]{\frac{3P}{2\pi\gamma}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2\beta - 1}{2\beta} \cdot \frac{3P}{2\pi\gamma}}.$$

Es erhellet aus der Natur der Aufgabe so wie aus der Formel für y, daß $\beta > \frac{1}{2}$ sein muß, wenn die Auflösung möglich sein soll.

§. 35.

Aufgabe.

Ein rechtwinklichtes, hohles, oben offenes Parallelepipedum, ist l Fuß lang, b Fuß breit, und

senkt sich c Fuß tief ins Wasser. Wird es außer seinem eigenen Gewicht noch mit Q ℔ beladen, so behält es a Fuß Bordhöhe. Man soll aus diesen Bedingungen die Höhe des Körpers bestimmen.

Auflösung.

Das leere Parallelepipedum senkt sich c Fuß ins Wasser, folglich ist das verdrängte Wasser Volumen $= \mathrm{lbc}$; und sein Gewicht $= \mathrm{lbc}\gamma$ und eben so groß ist also das Gewicht des leeren Körpers. Das Gewicht des beladenen ist daher $= \mathrm{lbc}\gamma + Q$ und setzt man die Tiefe der zugehörigen Einsenkung $= x$; so hat man

$$\mathrm{lbc}\gamma + Q = \mathrm{lbx}.\gamma; \text{ folglich}$$

$$x = c + \frac{Q}{\mathrm{lb}\gamma};$$

demnach, weil noch a Fuß Bordhöhe bleiben, die gesuchte Höhe $= a + x$ oder

$$= a + c + \frac{Q}{\mathrm{bl}\gamma}.$$

§. 36.

Aufgabe.

Wie tief sinkt ein als homogen angesehener normaler Cylinder von der Höhe h, dem Halbmesser r und dem specifischen Gewicht β, ins Wasser?

Auflösung.

1) Für eine verticale Lage der Achse. Setzt man die gesuchte Tiefe $= x$, so ergiebt sich leicht die Gleichung:

$$r^2 \pi x \gamma = r^2 \pi h \beta \gamma; \text{ also}$$

$$x = \beta . h.$$

2) Für eine horizontale Lage der Achse. Setzt man den der Senkung zugehörigen Mittelpunkts-Winkel $= \alpha$; so ist der Kreis-Ausschnitt $= \frac{\alpha}{360} \cdot r^2 \pi$; das Dreieck $= \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin} \alpha$; also der Abschnitt, oder der Querschnitt des verdrängten Wasserkörpers $= \frac{\alpha}{360} r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin} \alpha$; der Cubic-Inhalt desselben folglich

$$= \left(\frac{\alpha}{360} r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin} \alpha\right) h;$$

und also das Gewicht dieses Wasser-Raums

$$= \left(\frac{\alpha}{360} r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin} \alpha\right) h \gamma.$$

Man hat demnach zur Bestimmung von α die Gleichung

$$\left(\frac{\alpha}{360} r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin} \alpha\right) \gamma h = r^2 \pi h \beta \gamma;$$

oder

$$\alpha - \frac{180}{\pi} \operatorname{Sin} \alpha - 360 \beta = 0.$$

Für $\beta = 0{,}4$ ergiebt sich ziemlich genau durch Probiren $\alpha = 161° \; 51'$.

§. 37.

Aufgabe.

Ein normales Parallelepipedum, von der Höhe h, hat ein Quadrat zur Grund-Ebene dessen Seiten, jede $= a$, sind; das specifische Gewicht der Materie desselben sei $= \beta \, (< 1)$; wenn nun dieser als homogen zu betrachtender Körper so ins Wasser gelegt wird, daß die Kanten h eine hori-

zontale Lage annehmen, in welchen Lagen schwimmt derselbe, und wie hängt die Möglichkeit einer angenommenen Lage von den Werthen des β ab?

Auflösung.

I. Wenn eine der Seiten Ebenen ah eine horizontale Lage annimmt. (*Fig.* 15.)

Bezeichnet x die Tiefe der Einsenkung, so ist das Gewicht des verdrängten Wassers $= ahx.\gamma$; das des schwimmenden Körpers aber $= a^2 h \beta\gamma$; und aus der Gleichstellung folgt:

$$x = \beta . a.$$

Für jeden Werth von β, größer wie Null, und kleiner wie Eins, kann sich also eine solche Lage erzeigen, wie sie *Fig.* 15 darstellt, indem die Bedingung §. 26 immer erfüllt wird.

II. Wenn nur eine der Seitenkanten ins Wasser tritt. (*Fig.* 16.)

Stellt *Fig.* 16 den verticalen Querschnitt durch den Schwerpunkt b des schwimmenden Körpers vor, und ist g der Schwerpunkt des verdrängten Wasserkörpers vom Querschnitt EAF, so müssen b und g in einer Verticallinie liegen; ist also Ad eine lothrechte Linie und br, gw Normalen darauf, so hat man die Bedingungsgleichung

$$br = gw.$$

Man fälle auf AD die Normalen bc, gn; auf Ad die ce, nk; auf letztere die bf gt; so ist $br = ce - cf$ und $gw = nk - nt$; bezeichnet man nun AF mit x; AE mit y; und den Winkel AFE mit z, so sind auch die Winkel cAd, bce, gnk, jeder $= z$; ferner $Ac = cb = \frac{1}{2}a$; $An = \frac{1}{3}y$;

$gn = \frac{1}{3}x$; folglich $ce = \frac{1}{2}a \operatorname{Sin} z$; $cf = \frac{1}{2}a \operatorname{Cos} z$; $nk = \frac{1}{3}y \operatorname{Sin} z$; $nt = \frac{1}{3}x \operatorname{Cos} z$; daher

$$br = \tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin} z - \tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos} z;$$
$$gw = \tfrac{1}{3}y \operatorname{Sin} z - \tfrac{1}{3}x \operatorname{Cos} z$$

und die obige Bedingungs-Gleichung ist

$$\tfrac{1}{2}a \operatorname{Sin} z - \tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos} z = \tfrac{1}{3}y \operatorname{Sin} z - \tfrac{1}{3}x \operatorname{Cos} z;$$

oder

$$3a \operatorname{tg} z - 3a = 2y \operatorname{tg} z - 2x;$$

oder auch, weil $x \operatorname{tg} z = y$ ist

$$3ay - 3ax = 2y^2 - 2x^2$$

woraus, wenn man mit $2(y-x)$ dividirt, entsteht

$$x + y = \tfrac{3}{2}a.$$

Da nun das Gewicht des verdrängten Wasserkörpers $= \frac{1}{2}xyh\gamma$; das des schwimmenden Körpers $= a^2h\beta\gamma$ ist, so ist die zweite Bedingungs-Gleichung

$$\tfrac{1}{2}xyh\gamma = a^2h\beta\gamma; \text{ oder}$$
$$xy = 2a^2\beta.$$

Aus $x + y = \frac{3}{2}a$ und $xy = 2a^2\beta$; folgt aber

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = a.\frac{3 \pm \sqrt{9 - 32\beta}}{4}.$$

Soll nun eine solche Lage eintreten, wie sie *Fig.* 16 darstellt, so muß

1) $9 \geqq 32\beta$

2) $3 > \sqrt{9 - 32\beta}$

3) $\dfrac{3 + \sqrt{9 - 32\beta}}{4} \leqq 1$ seyn.

Aus der ersten Bedingung folgt

β kleiner, höchstens gleich $\frac{9}{32}$.

Die zweite findet von selbst immer statt.

Aus

Aus der dritten fließt endlich

β größer, mindestens gleich $\frac{8}{32}$.

Nur dann kann also eine Lage wie *Fig.* 16 statt findet, wenn $\beta = \frac{8}{32}$ oder $= \frac{9}{32}$ ist, oder einen Werth zwischen $\frac{8}{32}$ und $\frac{9}{32}$ hat.

Für $\beta = \frac{8}{32}$; wird $x = a$; $y = \frac{1}{2}a$; oder $x = \frac{1}{2}a$; $y = a$.

Für $\beta = \frac{9}{32}$; wird $x = \frac{3}{4}a$; $y = \frac{3}{4}a$.

In dieser Untersuchung ist aber bis jetzt im Allgemeinen, der besondere Fall daß $y = x$ sein kann, ganz beiseite gesetzt worden, und zwar dadurch daß man die Gleichung

$$3ay - 3ax = 2y^2 - 2x^2$$

mit $2.(y-x)$ dividirte, und die Quotienten $\frac{3}{2}a$ und $y+x$ einander gleich setzte. Diese Gleichsetzung ist aber nicht erlaubt, wenn $y = x$ ist; indem für diesen Fall beide Quotienten unbestimmt, nemlich $= \frac{0}{0}$ werden, also verschieden sein können. Hätte man die erwähnte Division nicht vorgenommen, so würde sich aus den beiden Gleichungen

$$3ay - 3ax = 2y^2 - 2x^2 \quad \text{und} \quad xy = 2a^2\beta$$

ergeben haben:

$$x^4 - \tfrac{3}{2}ax^3 + 3a^3\beta x - 4a^4\beta^2 = 0$$

welche Gleichung die gefundenen beiden Werthe für x, nemlich $x = a\,\frac{3+\sqrt{9-32\beta}}{4}$, und $x = a.$ $\frac{3-\sqrt{9-32\beta}}{4}$ zu Wurzeln haben muß und auch wirklich hat. Die beiden andern Wurzeln dieser Gleichung sind $x = a\sqrt{2\beta}$ und $x = a\sqrt{2\beta}$. Diese ergeben sich aber, ohne diese Gleichung vom

vierten Grade sogleich unmittelbar, wenn man den Fall $x = y$ besonders betrachtet. Für diesen Fall, fallen nemlich die Schwerpunkte b und g nothwendig immer in eine Verticallinie, und aus der Gleichung $\frac{1}{2} x^2 h\gamma = a^2 h \beta\gamma$ erhält man sogleich $x = y = a\sqrt{2\beta}$, so daß also für jeden Werth von β zwischen o und höchstens $\frac{1}{2}$ eine solche Lage denkbar ist.

III. Wenn zwei der Seitenkanten ins Wasser treten, ohne daß jedoch eine der Seiten-Ebenen eine horizontale Lage annimmt. (*Fig.* 17.)

Die Bedeutung der Buchstaben in *Fig.* 17 sei dieselbe wie in *Fig.* 16, so sind die Bedingungs-Gleichungen, wenn $AF = x$; $DE = y$ gesetzt wird

$$1)\quad \frac{x+y}{2} a h\gamma = a^2 h \beta\gamma$$

$$2)\quad br = gw;\ \text{oder}$$

$$1)\quad x + y = 2a\beta$$

$$2)\quad \tfrac{1}{2} a \operatorname{Sin} z - \tfrac{1}{2} a \operatorname{Cos} z = An \operatorname{Sin} z - ng.\operatorname{Cos} z.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkt ist aber

$$An = \frac{ay.\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a(x-y).\frac{1}{3}a}{\frac{x+y}{2}.a.}$$

$$= \tfrac{1}{3} a \frac{x+2y}{x+y};$$

$$ng = \frac{ay.\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a(x-y)\left(y + \frac{x-y}{3}\right)}{\frac{x+y}{2}.a}$$

$$= \tfrac{1}{3} \frac{x^2 + y^2 + xy}{x+y};$$

und die zweite Gleichung wird, wenn man diese Werthe substituirt, durch $\cos z$ dividirt, und mit $6(x+y)$ multiplicirt, folgende:

$$3a(x+y)\tan z - 3a(x+y) = 2a(x+2y)\tan z - 2(x^2+y^2+xy)$$

oder

$$a(x-y)\tan z = 3a(x+y) - 2.[(x+y)^2 - xy].$$

Nun ist aber $(x-y)\tan z = a$ und aus 1, $x+y = 2a\beta$ und substituirt man diese Werthe, so entsteht

$$a^2 = 6a^2\beta - 2(4a^2\beta^2 - xy)$$

und hieraus

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2(1 + 8\beta^2 - 6\beta).$$

Aus dieser Gleichung und der $x+y = 2a\beta$ ergiebt sich nun sogleich

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = a(\beta \pm \sqrt{3\beta - 3\beta^2 - \tfrac{1}{2}}).$$

Soll nun eine solche Lage eintreten können, wie sie *Fig.* 17 darstellt, so muß

1) $3\beta \geqq 3\beta^2 + \frac{1}{2}$

2) $\beta \geqq \sqrt{3\beta - 3\beta^2 - \frac{1}{2}}$

3) $\beta + \sqrt{3\beta - 3\beta^2 - \frac{1}{2}} \leqq 1$ sein.

Aus der ersten Bedingung folgt

β mindestens $= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$; höchstens $= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Aus der zweiten aber

β unter oder höchstens $= \frac{1}{4}$; und über oder mindestens $= \frac{1}{2}$; aber nicht zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$.

Aus der dritten endlich

β unter oder höchstens $\frac{1}{2}$ und über, oder mindestens $\frac{3}{4}$; aber nicht zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$.

Faßt man die drei Bedingungen zusammen, so kann eine Lage, wie *Fig.* 17 statt finden,

1) für $\beta = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}} = 0{,}21133\ldots.$
bis $\beta = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

2) für $\beta = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

3) für $\beta = \frac{3}{4} = 0{,}75$
bis $\beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} = 0{,}78867\ldots.$

Es wird aber, für $\beta = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$;

$$x = y = a\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}\right)$$

und dieser Fall gehört zu I., gewährt aber keine solche Lage wie *Fig.* 17.

Ferner wird für $\beta = \frac{1}{4}$;

$$x = \frac{1}{2}a;\ y = 0,$$

und dieser Fall gehört zu II., giebt aber nicht die Lage *Fig.* 17.

Ferner wird für $\beta = \frac{1}{2}$;

$$x = a;\ y = 0;$$

und dieser Fall gehört ebenfalls zu II, und erzeugt nicht die Lage *Fig.* 17.

Dann wird, für $\beta = \frac{3}{4}$;

$$x = a;\ y = \frac{1}{2}a,$$

und dieser Fall gehört hieher.

Endlich wird, für $\beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$;

$$x = y = a\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}\right),$$

und dieser Fall gehört zu I.

Nur dann also erzeugt sich eine Lage wie *Fig.* 17; wenn $\beta > 0{,}21133$ und kleiner wie $0{,}25$; ferner wenn $\beta = \frac{3}{4}$ bis unter $0{,}78867\ldots.$ ist.

IV. Wenn drei Seitenkanten ins Wasser treten. (*Fig.* 18.)

Die Bedeutung der Buchstaben der Figur, sei wie *Fig.* 16 und 17; BF sei $= x$; DE $= y$; so sind die Bedingungs-Gleichungen

1) $a^2 - \frac{1}{2}(a-x)(a-y) = a^2\beta$
2) $br = gw$; oder

1) $ax + ay - xy = a^2(2\beta - 1)$
2) $\frac{1}{2}a \operatorname{Sin} z - \frac{1}{2}a \operatorname{Cos} z = An \operatorname{Sin} z - ng \operatorname{Cos} z.$

Nach der Lehre vom Schwerpunkt ist aber

$$An = \frac{a^2 . \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(a-x)(a-y)[x + \frac{2}{3}(a-x)]}{a^2 - \frac{1}{2}(a-x)(a-y)}$$

oder, da nach 1, $\frac{1}{2}(a-x)(a-y) = a^2(1-\beta)$ ist;

$$An = \frac{a(4\beta-1) - 2(1-\beta)x}{6\beta}; \text{ ferner}$$

$$ng = \frac{a^2 . \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(a-x)(a-y) . \left(a - \frac{a-y}{3}\right)}{a^2 - \frac{1}{2}(a-x)(a-y)}$$

$$= \frac{a(4\beta-1) - 2(1-\beta)y}{6\beta}$$

und man hat also die beiden Gleichungen

1) $a(x+y) - xy = a^2(2\beta - 1)$
2) $3a\beta \operatorname{tang} z - 3a\beta = [a(4\beta-1) - 2(1-\beta)x] \operatorname{tang} z$
$- a(4\beta - 1) + 2(1-\beta)x.$

Die zweite Gleichung nimmt folgende Gestalt an

$[a(1-\beta) + 2(1-\beta)x] \operatorname{tang} z = a(1-\beta) + 2(1-\beta)y$

oder

$$(a + 2x) \operatorname{tang} z = a + 2y.$$

Es ist aber $(a-y) \operatorname{tang} z = a - x,$

folglich, wenn man den hieraus sich ergebenden Werth für tang z in die zweite Gleichung setzt:

$$(a+2x)(a-x) = (a+2y)(a-y)$$

oder:

$$a(x-y) = 2(x^2-y^2)$$

oder auch:

$$2(x+y) = a.$$

Hieraus, und aus der ersten Gleichung hat man also

1) $x+y = \frac{a}{2}$ und

2) $xy = \frac{1}{2}a^2 - a^2(2\beta-1) = a^2(\frac{3}{2}-2\beta)$

folglich

$$\left.\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right\} = a. \frac{1 \pm \sqrt{32\beta-23}}{4}.$$

Soll nun eine solche Lage eintreten können, wie sie *Fig.* 18 darstellt, so muß

1) $32\beta \geqq 23$;

2) $1 \geqq \sqrt{32\beta-23}$;

3) $\frac{1+\sqrt{32\beta-23}}{4} \leqq 1$ sein.

Aus der ersten Bedingung folgt

$\beta > \frac{23}{32}$; mindestens $\beta = \frac{23}{32}$.

Aus der zweiten

$\beta < \frac{24}{32}$; höchstens $\beta = \frac{24}{32}$.

Aus der dritten endlich

$\beta < 1$; höchstens $= 1$.

Nur dann kann also eine solche Lage wie *Fig.* 18 statt finden, wenn

$\beta = \frac{23}{32}$ oder $= \frac{24}{32}$ ist,

oder einen Werth zwischen $\frac{23}{32}$ und $\frac{24}{32}$ hat.

Für $\beta = \frac{23}{32}$; wird $x = \frac{1}{4}a$; $y = \frac{1}{4}a$.

Für $\beta = \frac{24}{32}$; wird $x = \frac{1}{2}a$; $y = 0$, oder
$x = 0$ und $y = \frac{1}{2}a$.

Untersucht man nun noch, für diese Lage *Fig.* 18 den besondern Fall, für welchen $x = y$ ist, so hat man, weil dann b und g nothwendig in eine Verticallinie fallen müssen, blos die Gleichung

$$[a^2 - \tfrac{1}{2}(a-x)(a-x)]h\gamma = a^2 h\beta\gamma$$

und hieraus

$$2a^2(1-\beta) = (a-x)^2; \text{ also}$$

$$x = y = a(1 - \sqrt{2-2\beta})$$

so daß also für jeden Werth des β zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 eine solche Lage denkbar ist.

§. 38.

Aufgabe.

Ein normales als homogen angesehenes Prismen von der Höhe h hat ein gleichseitiges Dreieck zur Grund-Ebene, dessen Seiten $= a$ sind; das specifische Gewicht der Materie desselben sei $= \beta (< 1)$. Es wird so ins Wasser gelegt, daß die Seitenkanten eine horizontale Lage annehmen; in welchen Lagen schwimmt dasselbe, und welche Werthe des β gestatten diese oder jene Lage?

Auflösung.

I. Wenn nur eine Seitenkante ins Wasser tritt, und die gegen überliegende Seiten-Ebene horizontal wird. (*Fig.* 19.)

Ist $AB = BC = AC = a$; BC $\doteq$ mit dem Wasserspiegel ED; die Figur ein lothrechter Durchschnitt durch den Schwerpunkt des Prismens;

AE = AD = x; so fallen die Schwerpunkte des schwimmenden Körpers und des verdrängten Wasser in eine Verticallinie, und die eine erforderliche Gleichung hat blos die Bedingung auszudrücken, daß beide Gewichte gleiche Größe haben müssen. Sie ergiebt sich sogleich, nemlich

$$\tfrac{1}{2} x^2 \,\mathrm{Sin}\, 60\, h\gamma = \tfrac{1}{2} a^2 \,\mathrm{Sin}\, 60 \,.\, h\beta\gamma,$$

und hieraus

$$x = a\sqrt{\beta}.$$

II. Wenn nur eine Seitenkante ins Wasser tritt, die gegenüber liegende Seiten-Ebene aber keine horizontale Lage annimmt. (*Fig.* 20.)

Es sei ABC der lothrechte Durchschnitt durch den Schwerpunkt K des Prismens; H sei der Schwerpunkt des verdrängten Wasserkörpers vom Querschnitt ADE; AG sei eine lothrechte Linie durch A; KN; HM Normalen darauf aus K und H; HP =|= DA; PN normal auf AG; HL normal auf PN; die gerade Linie durch A und K trift CB in seiner Mitte in J; so wie die durch D und H, die Linie AE in ihrer Mitte, in F schneidet; AE sei = x; AD = y; und $<$ JAG = z. Die hydrostatischen Bedingungs-Gleichungen sind nun

1) $ABC \,.\, h \,.\, \beta \,.\, \gamma = ADE \,.\, h\gamma$

2) $KN = HM$;

und die Hülfsgleichung ist

3) $AD \,\mathrm{Cos}\, DAN = AE \,\mathrm{Cos}\, EAN$;

aus welchen die drei unbekannten Größen x, y und z zu bestimmen sind.

Es ist aber

$$ABC = \tfrac{1}{2} a^2 \,\mathrm{Sin}\, 60^\circ;$$

$$ADE = \tfrac{1}{2} xy \operatorname{Sin} 60^\circ;$$

$$KN = AK \operatorname{Sin} z = \tfrac{2}{3} AJ . \operatorname{Sin} z$$

$$= \tfrac{2}{3} a \operatorname{Sin} 60 . \operatorname{Sin} z$$

$$HM = PN - PL = AF \operatorname{Sin} PAN - PH \operatorname{Sin} PHL$$

$$= \tfrac{1}{3} x \operatorname{Sin} (30 + z) - \tfrac{1}{2} . \tfrac{2}{3} y \operatorname{Sin} (30 - z);$$

$$AD \operatorname{Cos} DAN = y \operatorname{Cos} (30 - z)$$

$$AE \operatorname{Cos} EAN = x \operatorname{Cos} (30 + z),$$

und substituirt man diese Werthe, so sind die drei Gleichungen

1) $a^2 \beta = xy$

2) $2a \operatorname{Sin} 60 \operatorname{Sin} z = x \operatorname{Sin} (30 + z) - y \operatorname{Sin} (30 - z)$

3) $y \operatorname{Cos} (30 - z) = x \operatorname{Cos} (30 + z)$.

Löst man in der zweiten die Klammern auf, und dividirt mit $\operatorname{Cos} 30 \operatorname{Cos} z$, so entsteht

$$[2a - (x + y)] \operatorname{tang} z = (x - y) \operatorname{tang} 30$$

und verfährt man eben so mit der dritten, so erhält man

$$(x + y) \operatorname{tang} 30 \operatorname{tang} z = x - y.$$

Durch die Division beider entsteht nun

$$\frac{2a - (x + y)}{(x + y) \operatorname{tang} 30^\circ} = \operatorname{tang} 30^\circ;$$

und hieraus, weil $\operatorname{tang} 30^2 = \tfrac{1}{3}$ ist,

$$x + y = \tfrac{3}{2} a.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$x + y = \tfrac{3}{2} a \text{ und}$$

$$xy = a^2 \beta$$

folgt nun sogleich

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = a . \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16\beta}}{4}$$

und dann auch $\operatorname{tang} z = \sqrt{3 - \tfrac{16}{3} \beta}$.

Eine solche Lage, wie sie *Fig.* 20 darstellt ist also nur dann möglich, wenn

$$1)\quad 9 \geqq 16\beta,\ \text{und}$$

$$2)\quad \frac{3+\sqrt{9-16\beta}}{4} \leqq 1\ \text{ist;}$$

d. h. wenn $\beta = \frac{8}{16}$ oder $= \frac{9}{16}$ ist; oder zwischen $\frac{8}{16}$ und $\frac{9}{16}$ liegt.

Für $\beta = \frac{8}{16}$ wird aber $x = a$; $y = \frac{1}{2}a$; und für $\beta = \frac{9}{16}$ wird $x = y = \frac{3}{4}a$, so daß also eine Lage wie die *Fig.* 20 nur dann eintreten kann, wenn β zwischen $\frac{8}{16}$ und $\frac{9}{16}$ fällt.

Wählt man $\beta = \frac{35}{64}$ so wird

$$x = \tfrac{7}{8}a;\ y = \tfrac{5}{8}a;\ \tan z = \sqrt{\tfrac{1}{12}}.$$

III. Wenn 2 Seitenkanten ins Wasser treten, und die von ihnen begränzte Seiten-Ebene eine horizontale Lage annimmt. (*Fig.* 21.)

Hier ergiebt sich bei den in der Figur angedeuteten Zeichen

$$[\tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Sin} 60 - \tfrac{1}{2}(a-x)^2 \operatorname{Sin} 60]\, h\gamma = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Sin} 60 \,.\, h\beta\gamma$$

und aus dieser Gleichung

$$x = (1-\sqrt{1-\beta})\,.\,a.$$

IV. Wenn 2 Seitenkanten ins Wasser treten, die von ihnen begränzte Seiten-Ebene aber eine geneigte Lage annimmt. (*Fig.* 22.)

In der Figur, als lothrechten Durchschnitt durch den Schwerpunkt K des schwimmenden Körpers, sei H der Schwerpunkt des außerhalb des Wassers bleibenden Körpers vom Querschnitt EDA; W der Schwerpunkt des verdrängten Wassers vom

Querschnitt BDEC; AL eine Verticallinie; KN, WV, HM Normalen darauf; BF, CG Verticallinien bis zum Wasserspiegel; CJ normal auf BF; $BD = x$; $CE = y$; $\angle KAL = z$; P der Durchschnittspunkt der Verlängerung von MH mit AE $= a - y$; Q der Durchschnittspunkt der Verlängerung von AK mit CB; also $CQ = QB = \frac{1}{2} a$.

Die Bedingungs-Gleichungen sind

1) $BCED . h\gamma = ABC . h\beta\gamma$

2) $WV = KN$

und die Hülfs-Gleichung ist

3) $CG + BJ = BF$.

Es ist aber

$$ACED = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{Sin} 60 - \frac{1}{2}(a - x)(a - y) \operatorname{Sin} 60;$$

$$ABC = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{Sin} 60$$

$$WV = \frac{ABC . KN - AED . HM}{BCED}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt aber, wenn man die Werthe für BCED und ABC substituirt

$$\frac{1}{2}(a - x)(a - y) \operatorname{Sin} 60^\circ \text{ oder } AED = (\tfrac{1}{2} a^2 - \tfrac{1}{2} a^2 \beta) \operatorname{Sin} 60$$

und $BCED = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{Sin} 60 . \beta$;

und folglich ist

$$WV = \frac{\frac{1}{2} a^2 \operatorname{Sin} 60 . AK \operatorname{Sin} z - \frac{1}{2} a^2 (1 - \beta) \operatorname{Sin} 60 (PM - PH)}{\frac{1}{2} a^2 \operatorname{Sin} 60 . \beta}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} AQ \operatorname{Sin} z - (1 - \beta)[AP . \operatorname{Sin}(30 + z) - \frac{1}{2} . \frac{2}{3} . ED]}{\beta}$$

$$= \frac{2 . a \operatorname{Cos} 30 \operatorname{Sin} z - (1 - \beta)[2(a - y) \operatorname{Sin}(30 + z) - ED]}{3\beta}$$

$$= \frac{2a C 30 S z - (1 - \beta)[2(a - y) S(30 + z) - (a - y) S(30 + z) - (a - x) S(30 - z)]}{3\beta}$$

$$= \frac{2a \operatorname{Cos} 30 \operatorname{Sin} z - (1-\beta)[(a-y)S(30+z) - (a-x)S(30-z)]}{3\beta}$$

$$= \frac{2a\beta \operatorname{Cos} 30 \operatorname{Sin} z - (1-\beta)[x \operatorname{Sin}(30-z) - y \operatorname{Sin}(30+z)]}{3\beta}.$$

Ferner ist

$$KN = AK \operatorname{Sin} z = \tfrac{2}{3} AQ \operatorname{Sin} z$$
$$= \tfrac{2}{3} . a \operatorname{Cos} 30 . \operatorname{Sin} z;$$
$$CG = y \operatorname{Cos} ECG = y \operatorname{Cos}(30+z);$$
$$BJ = a \operatorname{Sin} BCJ = a \operatorname{Sin} z;$$
$$BF = x \operatorname{Cos} DBF = x \operatorname{Cos}(30-z).$$

Substituirt man nun diese Werthe, so sind die drei Gleichungen:

1) $a^2 - (a-x)(a-y) = a^2 \beta$; oder

$$a(x+y) = a^2 \beta + xy.$$

2) $\frac{2a\beta \operatorname{Cos} 30 \operatorname{Sin} z - (1-\beta)[x S(30-z) - y S(30+z)]}{3\beta} = \tfrac{2}{3} a \operatorname{Cos} 30 S z;$

oder

$$(1-\beta)[x \operatorname{Sin}(30-z) - y \operatorname{Sin}(30+z)] = 0$$

oder auch, weil $1-\beta$ nicht $= 0$ ist,

$$x \operatorname{Sin}(30-z) = y \operatorname{Sin}(30+z);$$

woraus, wenn man mit $\operatorname{Cos} 30 \operatorname{Cos} z$ dividirt und ordnet, entsteht

$$(x-y) \operatorname{tang} 30 = (x+y) \operatorname{tang} z.$$

3) $y \operatorname{Cos}(30+z) + a \operatorname{Sin} z = x \operatorname{Cos}(30-z)$

oder, durch $\operatorname{Cos} z$ dividirt, und $\tfrac{1}{2}$ für $\operatorname{Sin} 30$ gesetzt, dann mit 2 multiplicirt,

$$2(x-y) \operatorname{Cos} 30 = [2a - (x+y)] \operatorname{tang} z.$$

Der Quotient der zweiten und dritten Gleichung giebt

$$\frac{\operatorname{Sin} 30}{2 \operatorname{Cos} 30^2} = \frac{x+y}{2a-(x+y)} \text{ oder:}$$

weil $\sin 30 = \frac{1}{2}$; $\cos 30^2 = \frac{3}{4}$ ist,

$$x + y = \tfrac{1}{2} a;$$

und setzt man diesen Werth in die erste Gleichung, so wird sie

$$\tfrac{1}{2} a^2 = a^2 \beta + xy.$$

Man hat also nun

$$x + y = \tfrac{1}{2} a$$
$$xy = \tfrac{1}{2} a^2 - a^2 \beta$$

und hieraus

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = a . \frac{1 \pm \sqrt{16\beta - 7}}{4};$$

dann auch sogleich

$$\tang z = \sqrt{\frac{16\beta - 7}{3}}.$$

Eine solche Lage wie sie *Fig.* 22 darstellt, ist also nur dann möglich, wenn

1) $16 . \beta \geqq 7$;

2) $1 \geqq \sqrt{16\beta - 7}$

d. h. wenn $\beta = \frac{7}{16}$; oder $= \frac{8}{16}$ ist, oder zwischen $\frac{7}{16}$ und $\frac{8}{16}$ liegt.

Für $\beta = \frac{7}{16}$ wird $x = y = \frac{1}{4}$ und für $\beta = \frac{8}{16}$ wird $x = \frac{1}{2} a$; $y = 0$; so daß also eine Lage wie die *Fig.* 22 nur dann eintreten kann, wenn β zwischen $\frac{7}{16}$ und $\frac{8}{16}$ fällt.

Wählt man $\beta = \frac{29}{64}$; so wird $x = \frac{3}{8} a$; $y = \frac{1}{8} a$ $\tang z = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

§. 39.

Aufgabe.

Das Metacentrum des Parallelepipedums §. 37 zu bestimmen, wenn dasselbe aus der ruhenden Lage

Fig. 15 in eine solche wie *Fig.* 17 verrückt wird, und zugleich diejenigen Werthe des specifischen Gewichts β anzugeben, für welche der Körper in der ursprünglichen Lage, eine Stabilität besitzt.

Auflösung.

In der ruhenden Lage *Fig.* 15 ist $x = a\beta$; P sei der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers, Q der des verdrängten Wassers, also wenn der Körper als homogen anzusehen ist, $LP = \frac{1}{2}a$; $LQ = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}a\beta$. Stellt nun *Fig.* 23 die Lage nach erfolgter Verrückung dar; R den Schwerpunkt des nun verdrängten Wasserkörpers vom Querschnitt DAHG (so verstanden, daß DAHG = DAFE = $a^2\beta$ ist) so ist der Durchschnittspunkt M, der durch R gelegten Verticallinie mit der Richtung QP des Metacentrum.

Man setze $DG = a\beta + b$; also $E'G = F'H = b$; folglich $AH = a\beta - b$; ziehe durch R die Linie NJ ⫩ CB; RK ⫩ PQ; und durch H die Linie HT ⫩ CB; so ist

$$RN = \frac{DAHT.\frac{DA}{2} + GTH.\frac{HT}{3}}{DAHG}$$

$$= \frac{a(a\beta - b).\frac{a}{2} + ab.\frac{a}{3}}{a^2\beta} = \frac{3a\beta - b}{6\beta};$$

folglich

$$RJ = \frac{a}{2} - \frac{3a\beta - b}{6\beta} = \frac{b}{6\beta}$$

daher, wenn der Winkel HGT durch z ausgedrückt wird; weil $\angle MRT = HGT$ ist,

$$JM = RJ.\,\text{tang}\,z = \frac{b}{6\beta}\,.\,\text{tang}\,z.$$

Es ist aber $2b\,\text{tang}\,z = a$; folglich $\text{tang}\,z = \frac{a}{2b}$; daher

$$JM = \frac{a}{12\beta}.$$

Nun ist aber ferner RK oder

$$JL = \frac{DAHT.\,\frac{AH}{2} + GTH.\left(DT + \frac{GT}{3}\right)}{DAHG}$$

$$= \frac{a\,(a\beta - b).\,\frac{a\beta - b}{2} + ab\left(a\beta - b + \frac{2b}{3}\right)}{a^2\beta}$$

$$= \frac{3a^2\beta^2 + b^2}{6a\beta}\text{; und folglich}$$

$$LM = LJ + JM = \frac{3a^2\beta^2 + b^2}{6a\beta} + \frac{a}{12\beta}$$

$$= \frac{a^2(6\beta^2 + 1) + 2b^2}{12a\beta}\text{; daher}$$

$$PM = LM - LP = \frac{a^2(6\beta^2 + 1) + 2b^2}{12a\beta} - \frac{a}{2}\text{; oder}$$

$$PM = \frac{a^2.\,(6\beta^2 - 6\beta + 1) + 2b^2}{12a\beta}.$$

Nach §. 29 hat also der Körper in seiner ursprünglichen Lage *Fig.* 15 nur dann Stabilität, wenn, auch für ein unendlich kleines b, der Ausdruck $\frac{a^2(6\beta^2 - 6\beta + 1) + 2b^2}{12a\beta}$ positiv wird; wird er aber negativ, so setzt der Körper die begonnene Drehung fort, hat also keine Stabilität.

Nun wird aber, auch für den allerkleinsten Werth des b der Ausdruck

$$\frac{a^2(6\beta^2 - 6\beta + 1) + 2b^2}{12a\beta}$$

positiv, wenn $6\beta^2 + 1 > 6\beta$ und auch noch, wenn $6\beta^2 + 1 = 6\beta$ ist.

Aus $6\beta^2 + 2 > 6\beta$ folgt aber

$$\beta > \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{12}} \text{ und}$$
$$\beta < \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{12}}.$$

Aus $6\beta^2 + 1 = 6\beta$ aber entsteht

$$\beta = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{12}}.$$

Der Körper hat also in der Lage *Fig.* 15 nur dann Stabilität, wenn β gleich oder kleiner wie $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$; und auch, wenn β gleich oder größer, wie $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$ ist. Für diejenigen Werthe von β aber, welche zwischen $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$; und $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$; d. h. zwischen 0,21133 und 0,78867 fallen, hat der Körper in der Lage *Fig.* 15 keine Stabilität, sondern wird bei der geringsten Erschütterung umschlagen und eine andere Lage annehmen.

Für $\beta = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}$ ist die Stabilität gering in Vergleich mit denen, welche statt finden, wenn β bedeutend kleiner wie $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$ oder auch bedeutend größer wie $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$ ist.

Es ist interessant diese Resultate mit denen in §. 37. III zu vergleichen.

§. 40.

Aufgabe.

Das Metacentrum des Prismens §. 38 zu bestimmen, wenn dasselbe aus der ruhenden Lage *Fig.* 19 in eine solche wie *Fig.* 20 verrückt wird, und zugleich

zugleich diejenigen Werthe des specifischen Gewichts β anzugeben, für welche der Körper in der ursprünglichen Lage eine Stabilität besitzt.

Auflösung.

In *Fig.* 19 sei P der Schwerpunkt des Körpers also $AP = \frac{2}{3} a \operatorname{Sin} 60°$;

$$AD = AE = x = a\sqrt{\beta} \quad \text{§. 38. I.}$$

Q der Schwerpunkt des verdrängten Wassers; also

$$AQ = \tfrac{2}{3} x \operatorname{Sin} 60°.$$

Es stelle in *Fig.* 24; FG den Wasserspiegel dar; D′E′ die Linie DE in *Fig.* 19; FK sei =|= CB; R der Schwerpunkt von AFG; V der von KFG; VW sei =|= CB, also normal auf AP; VN =|= AG; NL =|= AP; RJ =|= CB; RM vertical; also M das Metacentrum;

$E'G = b$; $E'K = D'F = y$; $\angle MRJ = z$;
also $AFT = 30 + z$; $FGA = z - 30$;
so hat man

1) $\triangle AFG = AD'E'$ oder

$$(x + b)(x - y) = x^2;$$

also $y = \frac{bx}{b + x}$; $x - y = \frac{x^2}{b + x}$;

$$b + y = \frac{b(b + 2x)}{b + x}; \quad 2x - y = \frac{x(b + 2x)}{b + x};$$

$$3x + b - 2y = \frac{3x^2 + 2bx + b^2}{b + x}.$$

2) $AF \operatorname{Sin}(30 + z) = AG \operatorname{Sin}(z - 30)$; oder

$$(x - y) \operatorname{Sin}(30 + z) = (x + b) \operatorname{Sin}(z - 30)$$

und hieraus

$$\operatorname{tang} z = \frac{b^2 + 2bx + 2x^2}{b(b + 2x)} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{Sin} 60}.$$

3) AFG. RJ = AFK. o + FKG. VW.

Es ist aber

$$AFG = AD'E' = \tfrac{1}{2} x^2 \operatorname{Sin} 60$$

$$FKG = AFG - AFK = \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{Sin} 60 - \tfrac{1}{2}(x-y)^2 \operatorname{Sin} 60$$

$$= \tfrac{1}{2}.(2x-y)y \operatorname{Sin} 60 = \frac{bx^2(b+2x)}{2(b+x)^2} \operatorname{Sin} 60$$

$$VW = VL + LW = VN \operatorname{Cos} 60 + NH$$

$$= \tfrac{1}{3}. KG \operatorname{Cos} 60 + NF - HF$$

$$= \tfrac{1}{3}(b+y) \operatorname{Cos} 60 + \tfrac{2}{3}KF - \tfrac{1}{2}KF$$

$$= \tfrac{1}{6}(b+y) + \tfrac{1}{6}.(x-y)$$

$$= \tfrac{1}{6}(b+x);$$ daher

$$\tfrac{1}{2} x^2 \operatorname{Sin} 60 . RJ = \frac{bx^2(b+2x)}{2(b+x)^2} \operatorname{Sin} 60 . \frac{b+x}{6}$$

und hieraus

$$RJ = \frac{b(b+2x)}{6(b+x)}.$$

4) $JM = RJ . \operatorname{tang} z$

$$= \frac{b(b+2x)}{6(b+x)} . \frac{b^2+2bx+2x^2}{2b(b+2x) \operatorname{Sin} 60}$$

$$= \frac{b^2+2bx+2x^2}{12(b+x)\operatorname{Sin} 60}.$$

5) Wenn man die Momente in Beziehung auf eine durch A gelegte, mit CB parallele Linie nimmt, AFG. AJ = AFK. $\tfrac{2}{3}$. AH + FKG. AW; oder

$$\tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{Sin} 60 . AJ = \tfrac{1}{2}(x-y)^2 \operatorname{Sin} 60 . \tfrac{2}{3}.(x-y) \operatorname{Sin} 60$$

$$+ \frac{bx^2(b+2x)}{2(b+x)^2} \operatorname{Sin} 60 . (AH + HW).$$

Es ist aber $AH = (x-y) \operatorname{Sin} 60$

$$HW = NL = VN \operatorname{Sin} 60 = \tfrac{1}{3}(b+y) \operatorname{Sin} 60$$

daher $AH + HW = \dfrac{3x+b-2y}{3} \operatorname{Sin} 60$

$$= \frac{3x^2+2bx+b^2}{3(b+x)} \operatorname{Sin} 60;$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$AJ = \frac{2(x-y)^3 \operatorname{Sin} 60}{3x^2} + \frac{b(b+2x)}{(b+x)^2} \cdot \frac{3x^2+2bx+b^2}{3(b+x)} \operatorname{Sin} 60$$

$$= \left[\frac{2x^4}{3(b+x)^3} + \frac{b(b+2x)(3x^2+2bx+b^2)}{3(b+x)^3}\right] \operatorname{Sin} 60.$$

6) Aus 4 und 5, folgt

$$AM = AJ + JM = \frac{2x^4 + b(b+2x)(3x^2+2bx+b^2)}{3(b+x)^3} S\,60$$

$$+ \frac{b^2+2bx+2x^2}{12(b+x) \operatorname{Sin} 60};$$

oder, weil $\operatorname{Sin} 60^2 = \frac{3}{4}$ ist,

$$AM = \frac{2x^4+6bx^3+7b^2x^2+4b^3x+b^4}{3(b+x)^3 \operatorname{Sin} 60}.$$

7) Da nun $AP = \frac{2}{3} a \operatorname{Sin} 60$ ist, so hat man

$$PM = AM - AP;$$

oder, wenn man die Werthe setzt

$$PM = \frac{(4x-3a)x^3 + b(12x^3+14bx^2+8b^2x+2b^3-3ab^2-9abx-9ax^2)}{6(b+x)^3 \operatorname{Sin} 60}$$

Soll nun der Körper in der Lage *Fig.* 19 Stabilität besitzen, so muß PM auch für den kleinsten Werth des b, also auch für $b = 0$; noch positiv sein. Für $b = 0$; wird aber

$$PM = \frac{4x-3a}{6 \operatorname{Sin} 60}.$$

und es findet also nur dann *Fig.* 19 eine Stabilität statt, wenn

$4x > 3a$; mindestens $4x = 3a$ ist.

Es ist aber $x = a\sqrt{\beta}$ und die Bedingung der Stabilität ist also

$4\sqrt{\beta} \geqq 3$; folglich

$\beta \geqq \frac{9}{16}$.

Für $\beta > \frac{9}{16}$ bleibt also die Lage *Fig.* 19.

Für $\beta = \frac{9}{16}$ ebenfalls.

Ist $\beta > \frac{8}{16}$ und $< \frac{9}{16}$ so entsteht eine Lage wie *Fig.* 20 oder 24. (§. 38. II.)

Ist $\beta = \frac{8}{16}$ so erzeigt sich die Lage *Fig.* 25. (§. 38. II und IV.)

Ist $\beta < \frac{8}{16}$ und $> \frac{7}{16}$ so entsteht die Lage *Fig.* 22. (§. 38. IV.)

Ist $\beta = \frac{7}{16}$ oder kleiner, so erzeigt sich allemal die *Fig.* 21.

§. 41.

Aufgabe.

Mit p ℔ einer Materie, deren specifisches Gewicht $= \alpha$ ist, sollen 2 gleich große Kugeln von einer Materie, deren specifisches Gewicht $= \beta$ ist, verbunden werden. Die Halbmesser x dieser Kugeln der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß die ganze Verbindung eben so viel Wasser verdränge, also eben so schwimme, wie eine Materie deren specifisches Gewicht δ zwischen α und β fällt, und kleiner wie 1 ist.

Auflösung.

Nach §. 31 hat man, da der Cubic-Inhalt jeder Kugel $= \frac{4}{3} x^3 \pi$ ist,

$$\frac{p}{\alpha} + \frac{2 \cdot \frac{4}{3} x^3 \pi \beta \gamma}{\beta} = \frac{p + 2 \cdot \frac{4}{3} x^3 \pi \beta \gamma}{\delta}$$

und hieraus

$$x = \sqrt[3]{\frac{\alpha - \delta}{\delta - \beta} \cdot \frac{3p}{8 \pi \alpha \gamma}}.$$

§. 42.

Aufgabe.

Die specifischen Gewichte β, fester und flüssiger Körper zu bestimmen.

Auflösung.

1) Für feste Körper, welche specifisch schwerer als Wasser sind, und sich im Wasser nicht auflösen.

Das Gewicht eines solchen Körpers in freier Luft sei $= P$; unter Wasser sei es $= Q$; so ist sein Gewichtsverlust unter Wasser $= P - Q$; folglich nach §. 30

$$P - Q = \frac{P}{\beta}; \text{ und daher}$$

$$\beta = \frac{P}{P - Q}.$$

2) Für feste Körper, welche specifisch leichter als Wasser sind, und sich im Wasser nicht auflösen.

Man verbinde den Körper mit einem so schweren, daß die Verbindung specifisch schwerer als Wasser wird. Wiegt nun der Körper dessen specifisches Gewicht β bestimmt werden soll, in freier Luft P; die Verbindung in freier Luft R, unter Wasser Q; der Hülfskörper in freier Luft p, unter Wasser q, so ist der Gewichtsverlust desselben $= p - q$; der Gewichtsverlust der Verbindung aber $R - Q$; folglich der Gewichtsverlust des Körpers selbst $= R - Q - (p - q)$ und daher ist also

$$\beta = \frac{P}{R - Q - (p - q)} = \frac{P}{P - (Q - q)}.$$

3) Für flüssige Körper.

Ein Körper der schwerer wie diese Flüssigkeit und auch schwerer wie Wasser ist, und sich in beiden nicht auflößt, habe das Volumen V; und das absolute Gewicht P; in der Flüssigkeit wiege er R; im Wasser Q, so ist

$$V\beta\gamma = P - R; \text{ und}$$
$$V\gamma = P - Q; \text{ also}$$
$$\beta = \frac{P - R}{P - Q}.$$

4) Für feste Körper, welche sich im Wasser auflösen.

Man bestimme nach 3, das specifische Gewicht α einer Flüssigkeit, in welcher der Körper sich nicht auflößt und untersinkt; der Körper selbst wiege P; sein Gewicht in dieser Flüssigkeit sei $= Q$, V bezeichne sein Volumen, so ist

$$V\beta\gamma = P;$$
$$V\alpha\gamma = P - Q; \text{ also}$$
$$\beta = \alpha\frac{P}{P - Q}.$$

§. 43.

Zusatz.

Zu Bestimmung der specifischen Gewichte von Flüssigkeiten, bedient man sich am bequemsten der Senkwegen oder Aräometer, entweder mit oder ohne Scale. Die Theorie derselben ist höchst einfach:

Stellt nemlich

1) *Fig.* 26 den lothrechten Durchschnitt eines solchen Aräometers ohne Scale dar; b ein oben angebrachtes Tellerchen, um Gewichte auflegen zu

können; c einen festen bezeichneten Punkt der Röhre, und bezeichnet P das Gewicht des unbeschwerten Instruments; V das Volumen desselben von a bis c; p das Gewicht, welches auf das Tellerchen gelegt werden muß, damit sich das Instrument im Wasser bis c einsenkt; $\pm q$ das Gewicht, welches dann noch auf das Tellerchen zu legen ist, damit sich das Instrument in einer andern Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht β bestimmt werden soll, ebenfalls bis c einsenke, so hat man die beiden Gleichungen

$$V\beta\gamma = P + p \pm q$$
$$V\gamma = P + p$$

und aus ihnen

$$\beta = \frac{P + p \pm q}{P + p}.$$

Ist aber

2) *Fig.* 27 der lothrechte Durchschnitt einer Senkwage, an welcher eine Scale angebracht werden soll, b der Punkt bis zu welchen sich dasselbe im Wasser einsenkt, P das Gewicht des Instruments, und es soll der Punkt x der Röhre bestimmt werden, bis zu welchen sich dies Instrument vom Gewicht P in einer Flüssigkeit vom bestimmten specifischen Gewicht β einsenken würde (jedoch, ohne daß man diese Flüssigkeit bei der Hand hat), so bezeichne V das Volumen des Instruments von a bis x; und p das Gewicht welches noch in a gelegt werden muß, damit das so beschwerte Instrument im Wasser bis x einsinke. Man hat dann die Gleichungen

$$V\beta\gamma = P$$

$$V\gamma = P + p; \text{ also}$$

$$(P + p)\beta = P \text{ und hieraus}$$

$$p = \frac{P}{\beta} - P.$$

Ist so p gefunden, so muß man, je nachdem für p ein positiver oder negativer Werth entsteht, entweder in a das Gewicht p zulegen, oder aus a das Gewicht p wegnehmen, und dann das Instrument ins Wasser senken, so ergiebt sich der verlangte Punkt x.

§. 44.

Zusatz.

Auf Salinen sind die Senkwagen (Salzspindeln) mit Scale, zu Bestimmung des Gehalts der Soole, vorzüglich in Gebrauch; ihre Anfertigung wird aber dadurch leichter gemacht, daß man die verschiedenen Salzauflösungen im Wasser, wirklich bildet und so die Punkte der Scale praktisch bestimmt.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewicht verschiedener Flüssigkeiten unter sich, und mit festen Wänden, so wie vom Messen der Höhen durch's Barometer.

---

§. 45.

Aufgabe.

In zwei communicirenden Röhren *Fig.* 28 befinden sich Flüssigkeiten von verschiedenen Gewicht; in der I stehe eine Flüssigkeit vom specifischen Gewicht α in der Höhe h; zu welcher Höhe x wird in der zweiten Röhre vom Querschnitt a eine leichtere Flüssigkeit von specifischen Gewicht β stehen müssen, damit Gleichgewicht statt findet?

Auflösung.

Der Druck auf a von der Flüssigkeit in I herrührend ist $= a h \alpha \gamma$; von der Flüssigkeit in II herrührend ist er aber $a x \beta \gamma$; fürs Gleichgewicht ist also $a x \beta \gamma = a h \alpha \gamma$; folglich

$$x = h \frac{\alpha}{\beta}.$$

Beispiel. Ist in I bis a Quecksilber; in II Wasser, so hat man $\alpha = 14$; $\beta = 1$; also $x = 14 . h$.

§. 46.

Aufgabe.

In einem Gefäß, dessen verticalen Querschnitt *Fig.* 29 darstellt, steht eine Flüssigkeit, vom speci=

fischen Gewicht α, in der Höhe b über dem Boden des Gefäßes; auf der horizontalen, obern Begränzungsebene derselben ruht eine leichtere Flüssigkeit vom specifischen Gewicht β, und die Höhe dieser Schicht sei $= c$; es wird ein Cubus vom specifischen Gewicht δ welches größer wie β und kleiner wie α ist, eingesenkt, und angenommen, daß derselbe mit einer seiner Ebenen eine horizontale Lage annehme, man soll bestimmen zu welcher Tiefe x sich derselbe in die untere Flüssigkeit senkt.

Auflösung.

1) Für den Fall, welchen die Figur andeutet.

Bezeichnet a die Seite des Cubus, so ist das Gewicht des schwimmenden Körpers $= a^3 \delta \gamma$; das der unteren verdrängten Flüssigkeit $= a^2 x \alpha \gamma$; das der obern $= a^2 (a - x) \beta \gamma$; also die Gleichung

$$\alpha x + (a - x) \beta = a \delta$$ und hieraus

$$x = a \frac{\delta - \beta}{\alpha - \beta}.$$

Eine solche Lage erzeigt sich also nur dann, wenn $c > a - x$; d. h. wenn

$$c > a . \frac{\alpha - \delta}{\alpha - \beta}$$ ist.

2) Für den Fall, wenn $c < a . \frac{\alpha - \delta}{\alpha - \beta}$ ist.

Hier entsteht die Gleichung

$$a^2 x \alpha \gamma + a^2 c \beta \gamma = a^3 \delta \gamma$$ und aus ihr

$$x = \frac{a \delta - c \beta}{\alpha}.$$

Ist $b < x$ oder auch $b = x$ so geht der Kör-

per zu Boden, schwimmt also nicht. Soll er schwimmen, so muß also

$$b > a \frac{\delta - \beta}{\alpha - \beta} \text{ sein.}$$

§. 47.

Erfahrung.

1) Die Luft ist schwer, und das specifische Gewicht der Luft in einer Höhe genommen, welche ohngefähr der Oberfläche des Meeres gleich kommt, ist $= \frac{1}{800}$.

2) Denkt man sich zwei communicirende Röhren, die eine so hoch als die unsere Erdkugel umgebende atmosphärische Luft reicht und mit dieser Luft, in ihren natürlichen, an Dichtigkeit, also auch an Gewicht nach oben zu abnehmenden Zustand, angefüllt; die andere aber ohngefähr 32 Fuß hoch, voll Wasser, und an ihrer obern Gränze der Einwirkung der Luft nicht ausgesetzt, so findet Gleichgewicht statt.

§. 48.

Zusatz.

Da das specifische Gewicht des Quecksilbers $= 14$ ist, so wird eine mit den Druck der atmosphärischen Luft in der Höhe der Oberfläche des Meeres, unten communicirende Röhre voll Quecksilber, welche oben dem Druck der Luft nicht ausgesetzt ist, die Höhe $\frac{32}{14}$ Fuß = nahe 28 Zoll, haben müssen, um mit dem Druck der Luft Gleichgewicht zu halten. Erhebt man sich mit einer solchen Vorrichtung über die Oberfläche des Meeres,

so wird dann nothwendig das Quecksilber sinken, und senkt es sich bei der ersten Erhebung zur Höhe H um b Zoll, so wird es, wenn man dann noch H Fuß steigt, um weniger als b Zoll fallen, weil die Luft in den höhern Regionen leichter ist, die Senkungen werden sich aber wie die mittleren Höhen der Quecksilbersäulen verhalten, weil diese die Dichtigkeit der Luft messen, und mit dem Druck der Luft Gleichgewicht erhalten.

Hieraus erhellet die Möglichkeit mit Hülfe einer solchen Vorrichtung (eines Barometers) Höhen zu messen.

§. 49.

Aufgabe.

An irgend einer Stelle der Erdoberfläche sei der Barometerstand $= p$; an einer andern, die um x Fuß höher liegt, sei er $y = \varphi x$. In der Gegend der Oberfläche des Meeres, wo der Barometerstand $= 28''$ ist, sinke das Quecksilber um a, wenn man das Barometer um die Höhe h erhebt. Man soll eine Gleichung für diese Größen herleiten.

Auflösung.

Für die Erhebung $x + k$ ist der Barometerstand $= \varphi(x + k)$; also ist die Senkung des Quecksilbers, wenn man sich um k erhebt $= \varphi x - \varphi(x + k)$; und den mittleren Barometerstand auf die Höhe k kann man durch $\varphi(x + k')$ ausdrücken, wenn k' eine zwischen Null und k liegende Größe bezeichnet. In Beziehung auf die

Größe der Erhebungen k und h, wenn einerlei Luft-Dichtigkeiten statt fänden, hätte man also

$$\varphi x - \varphi(x+k) : a = k : h.$$

In Beziehung auf die Dichtigkeiten aber, wenn die Erhebungen gleich wären, hätte man

$$\varphi x - \varphi(x+k) : a = \varphi(x+k') : 28''$$

und folglich ist

$$\varphi x - \varphi(x+k) : a = k\varphi(x+k') : 28.\ h;$$

oder

$$-28h\left(k\varphi' x + \frac{k^2}{2}\varphi'' x + \ldots.\right) = ak\,\varphi(x+k');$$

oder

$$\frac{\varphi' x + \frac{k}{2}\varphi'' x + \ldots.}{\varphi(x+k')} = -\frac{a}{28h};$$

und hieraus, wenn man k, also auch $k' = o$ setzt

$$\frac{\varphi' x}{\varphi x} = -\frac{a}{28h};\ \text{folglich}$$

$$\text{logn}\,\varphi x = -\frac{a}{28h}.\ x + \text{Const.}$$

Für $x = o$ wird $\varphi = p$; also $\text{logn}\,p = C$; daher vollständig

$$\text{logn}\,y = -\frac{a}{28h}x + \text{logn}\,p$$

und demnach

$$x = \frac{28h}{a}.\ \text{logn}\,\frac{p}{y}.$$

§. 50.

Zusatz.

Genauen Beobachtungen zufolge ist, für $h = 8{,}755$ Fuß, a im Mittel $= \frac{1}{100}$ Zoll anzu-

nehmen, und substituirt man diese Werthe, so entsteht

$$x = 24500 \text{ logn } \frac{p}{y} \text{ Fuße; oder,}$$

für briggische Logarithmen

$$x = 56500. \text{ logbr } \frac{p}{y} \text{ Fuße.}$$

Anmerk. Diese beiden Formeln für x können nur zu beiläufigen Bestimmungen dienen, insoferne die Verschiedenheit des Wärmegrades, und die Veränderlichkeit der Anziehungskraft der Erde unberücksichtigt geblieben ist.

Benzenbergs Beschreibung eines einfachen Reisebarometers, nebst Anleitung zu Berechnung der Berghöhen. Düsseldorf 1811, gewährt eine sehr leichte Anleitung zum Höhen-Messen.

Die Mechanik.

Erstes Kapitel.

Von der gleichförmigen Bewegung.

§. 51.

Lehrsatz.

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig mit der Geschwindigkeit von c Fuß während t Secunden, so ist der durchlaufene Weg oder $h = c.t$ Fuße.

Beweis.

Es ist c der Weg welchen der Punkt in jeder Secunde durchläuft; t die Anzahl Secunden, während welcher er sich bewegt; nimmt man daher c so oft, als es die abstracte Zahl t anzeigt, so erhält man den ganzen zurückgelegten Weg, d. h. es ist

$$h = t.c.$$

§. 52.

Lehrsatz.

Wird einem Punkt das Bestreben mitgetheilt sich nach irgend einer Richtung, gleichförmig mit der Geschwindigkeit c, und zugleich auch das Bestreben sich nach einer andern Richtung welche mit

jener den Winkel α bildet, ebenfalls gleichförmig, mit der Geschwindigkeit v, zu bewegen, so bewegt sich derselbe mit der Geschwindigkeit

$$x = \sqrt{c^2 + v^2 + 2cv \operatorname{Cos} \alpha}$$

nach der Richtung der durch α gehenden Diagonale des mit c, v und α zu verzeichnenden Parallelogramms.

Beweis.

Die Größen der Kräfte, welche dem Punkt die Bestrebungen mittheilen, verhalten sich, wie die Wirkungen, welche sie unter übrigens gleichen Umständen hervorbringen würden, d. h. wie c : v. Die Diagonale durch α bestimmt also nach den Lehren der Statik die Richtung und Größe der mittleren Kraft, also auch den Erfolg, d. h. die Größe des Wegs x in jeder Secunde. Nun ist aber nach den Lehren der Trigonometrie die Größe dieser Diagonale

$$= \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv \operatorname{Cos}(180 - \alpha)} \text{ oder}$$
$$= \sqrt{c^2 + v^2 + 2cv \operatorname{Cos} \alpha}; \text{ folglich}$$
$$x = \sqrt{c^2 + v^2 + 2cv \operatorname{Cos} \alpha}.$$

§. 53.

Zusatz.

Nach dem vorigen §. kann man nun Geschwindigkeiten eben so zerlegen und zusammensetzen, wie in der Statik, Kräfte, und es erhellet sogleich, daß wenn ein Punkt welcher sich mit der Geschwindigkeit v gleichförmig nach irgend einer Richtung bewegte, von dieser Bahn abgelenkt, und gezwun-

gen wird, nach einer andern geraden Linie, welche mit der vorigen Richtung den Winkel α bildet, die Bewegung fortzusetzen, derselbe in dieser neuen Richtung nur mit der Geschwindigkeit $v \operatorname{Cos} \alpha$ sich bewegen wird, so daß also sein absoluter Geschwindigkeitsverlust $= v - v \operatorname{Cos} \alpha = v \operatorname{Sin} v \alpha$ sein wird. Tritt also ein bewegter Punkt in seiner Bahn aus einer geraden Richtung in eine Curve oder umgekehrt, jedoch so daß für den Uebergangspunkt die gerade Linie die Tangente der Curve ist, so ist $\alpha =$ Null, also auch $\operatorname{Sin} v \alpha =$ Null, folglich auch der absolute Geschwindigkeitsverlust = Null.

Aufgaben

zur Anwendung der Gesetze dieses ersten Kapitels.

§. 54.

Aufgabe.

Bei einem Pferdegöpel zieht ein Pferd an einem Hebelsarm von 15 Fuß und vollendet einen Kreislauf in 24 Secunden. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich dasselbe?

Auflösung.

Hier ist $2 . 15 . \pi = c . 24$; also

$$c = \frac{5 . \pi}{4} = 3{,}927 \text{ Fuß}.$$

§. 55.

Aufgabe.

Einem Punkt werden nach zweierlei Richtungen, welche einen Winkel von 60° bilden, die Geschwindigkeiten von 6 und 5 Fuß mitgetheilt. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich derselbe, und welche Winkel bildet die zugehörige Richtung, mit den Richtungen 6 und 5?

Auflösung.

Die mittlere Geschwindigkeit ist

$$= \sqrt{6^2 + 5^2 + 2.6.5 \cos 60} = 9{,}54$$

und die beiden Winkel y, z ergeben sich aus

$$6 + 5 : 6 - 5 = \operatorname{tg} \tfrac{60}{2} : \operatorname{tg} \frac{z - y}{2};$$

nemlich hinreichend genau

$$y = 27°;\ z = 33°.$$

§. 56.

Aufgabe.

Aus dem Ort A *(Fig. 30.)* bewegt sich ein Punkt nach der Richtung AC mit der Geschwindigkeit c; aus dem Ort B geht zugleich ein anderer Punkt nach der Richtung BD mit der Geschwindigkeit v; AC bilde mit AB den Winkel α; BD mit AB den β; AB sei $= a$. Wie weit sind beide bewegten Punkte im letzten Augenblick der Zeit t von einander?

Auflösung.

Der erste Punkt durchläuft in t Secunden den Weg ct, welchen AC andeuten soll; der zweite

Punkt durchläuft in dieser Zeit den Weg vt, welchen BD ausdrücken kann. Die Entfernung beider Punkte am Ende der Zeit t ist also = CD, und die Größe von CD ist

$$=\sqrt{(c^2+v^2).t^2+a^2-2at(cCs\alpha+vCs\beta)+2cvt^2C(a+\beta)}$$

(siehe meine Geometrie §. 397.)

§. 57.

Aufgabe.

Aus einem Orte A *(Fig. 31)* werden 2 Punkte nach Richtungen unter dem Winkel α mit den Geschwindigkeiten v, c zu gleicher Zeit ausgetrieben; jeder bewege sich t Secunden; der zweite treffe aber nach Verlauf der Zeit t′ (< t) ein Hinderniß welches ihn in die Bahn DE bringt, die mit AD den Winkel β bildet. Wie weit sind beide Punkte am Ende der Zeit t von einander entfernt?

Auflösung.

Hat der zweite Punkt den Weg AD = ct′ durchlaufen, so behält er dann nach der Richtung DE nur die Geschwindigkeit = — c Cos β und bewegt sich in derselben während der Zeit t″ = t — t′, durchläuft also in ihr den Weg DE = — c Cos β. t″; die gesuchte Entfernung ist also, wie in §. 56.

$$=\sqrt{\begin{bmatrix}(vt)^2+(ct')^2+(ct''\text{Cos}\,\beta)^2-2vct\,t'\text{Cos}\,\alpha \\ +2c^2t't''\text{Cos}\,\beta^2-2vct\,t''\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}(\alpha+\beta).\end{bmatrix}}$$

Beispiel. Ist t = 6; v = 9; α = 80°; t′ = 4; β = 120; c = 8; also t″ = 2, so ergiebt sich die Entfernung FE = 53,38....

Zweites Kapitel.

Von der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

---

§. 58.

Erklärung.

Wenn eine ruhende Materie, deren Masse (Menge materieller Theile) $= M$ ist, von irgend einer Kraft $= P$ angegriffen wird, und man denkt sich jeden statischen Widerstand beseitigt, so hat P nichts weiter als das Beharrungsvermögen oder die Trägheit dieser Materie zu überwinden. Es muß also, da P ganz als Uebergewicht wirkt, auch wenn P noch so klein gedacht wird, die Masse M der Einwirkung von P gemäß, eine Bewegung annehmen, und denkt man sich nun die Einwirkung der Kraft auf M fortdaurend thätig, auch wenn M schon in Bewegung getreten ist, so muß auch die Schnelligkeit dieser Bewegung fortwährend wachsen, die Bewegung also eine beschleunigte sein.

Man nennt in solchen Fällen, P die bewegende Kraft, oder Ueberwucht; der Quotient $\frac{P}{M}$ aber, d. h. der Theil der bewegende Kraft P, welcher auf jede Einheit der Masse M wirkt, heißt die beschleunigende Kraft, und der Weg welchen M in der ersten Secunde der Bewegung durchläuft, wird die Beschleunigung genannt, und soll durchaus durch G ausgedrückt werden.

Ist die beschleunigende Kraft $\frac{P}{M}$ unveränderlich, d. h. wirkt in jeden Augenblick auf jede Einheit der Materie immer aufs neue eine Kraft, deren Einwirkung $= \frac{P}{M}$ ist, so muß auch mit jeder neuen Einwirkung, ein immer gleich groß bleibender Zuwachs an Geschwindigkeit erfolgen, und eine solche Bewegung heißt gleichförmig beschleunigt. Ist $\frac{P}{M}$ veränderlich, so heißt die entstehende Bewegung, ungleichförmig beschleunigt. In diesen Kapitel ist nur von gleichförmig beschleunigter Bewegung die Rede, d. h. von einer solchen Bewegung bei welcher sich die in verschiedenen Zeiträumen T, t (vom Anfang der Bewegung an gerechnet), erlangten Geschwindigkeiten C, c; wie die vom Anfang an verflossenen Zeiten T, t verhalten.

§. 59.

Lehrsatz.

Bezeichnet v die Geschwindigkeit, welche ein gleichförmig beschleunigt, geradlinigt, bewegter Punkt im letzten Augenblick der ersten Secunde der Bewegung erlangt hat, d. h. bezeichnet v den Weg welchen der Punkt in jeder folgenden Secunde blos vermöge seines Beharrungsvermögens durchlaufen würde, und H den, vom Anfang der Bewegung an, in der Zeit T durchlaufenen Raum, so ist $H = \frac{1}{2} v. T^2$.

Beweis.

Es ist H eine Funktion von T; und φT bezeichne diese Abhängigkeit, d. h. es sei $H = \varphi T$, so ist, wenn man sich die Zeit $T + k$ vom Anfang der Bewegung an, verflossen vorstellt, $\varphi(T + k)$ der in dieser Zeit $T + k$, also $\varphi(T + k) - \varphi T$, der in der Zeit k durchlaufene Weg. Bezeichnet nun C die im letzten Augenblick der Zeit T und C′ die im letzten Augenblick der Zeit $T + k$, erlangte Geschwindigkeit, so hat man nach §. 58.

$$1 : T = v : C \text{ und}$$
$$1 : T + k = v : C'; \text{ also}$$
$$C = vT;\; C' = v(T + k).$$

Der Weg $\varphi(T+k) - \varphi T$ wird also dergestalt von dem bewegten Punkt durchlaufen, daß seine Geschwindigkeit im ersten Augenblick der Zeit k gleich $v . T$; im letzten aber $= v(T + k)$ ist; also von vT bis zu $v(T + k)$ allmählig anwächst. Behielte der bewegte Punkt nun während der Durchlaufung dieses Weges immer die kleinste Geschwindigkeit vT, so wäre sein Weg in der Zeit $k = k . vT$ (§. 51.), und es ist also

$$\varphi(T+k) - \varphi T > k . v . T.$$

Hätte derselbe aber, während der Zeit k immer die größte Geschwindigkeit $v(T+k)$ so wäre sein Weg in dieser Zeit $k = kv(T + k)$; und es ist also

$$\varphi(T + k) - \varphi T < kv(T+k).$$

Denkt man sich nun unter k′ eine Größe, kleiner wie k und größer wie Null, so muß es

einen Werth für k' geben, für welchen $\varphi(T+k) - \varphi T = kv(T+k')$ ist.

Nach der taylorschen Reihe entspringt hieraus

$$k\varphi' T + \frac{k^2}{2}\varphi'' T + \ldots\ldots = kv(T+k'); \text{ oder}$$

$$\varphi' T + \frac{k}{2}\varphi'' T + \ldots\ldots = v(T+k');$$

und setzt man nun $k = 0$, so wird auch $k' = 0$, und man erhält

$$dH = \varphi' T = vT; \text{ folglich}$$

$$H = \varphi T = v\int T = \tfrac{1}{2} vT^2 + \text{Const.}$$

Nun verschwindet aber H mit T; also ist Const. $= 0$; demnach vollständig

$$H = \varphi T = \tfrac{1}{2} v T^2.$$

§. 60.

Zusatz.

Setzt man in die hergeleitete Formel $H = \frac{1}{2}vT^2$; für T den Werth 1; also für H den G (§. 58.) so entsteht

$$G = \tfrac{1}{2} v; \text{ also}$$

$$v = 2G;$$

d. h. die im letzten Augenblick der ersten Secunde der Bewegung erlangte Geschwindigkeit, ist doppelt so groß, als der in der ersten Secunde durchlaufene Weg.

§. 61.

Zusatz.

Bezeichnen, für eine und dieselbe gleichförmig beschleunigte Bewegung, T, t verschiedene vom An-

fang der Bewegung an verflossene Zeiten; H, h die zugehörigen durchlaufenen Wege, so hat man

$$H = \frac{1}{2} v T^2; \; h = \frac{1}{2} v t^2; \text{ also}$$

$$H : h = T^2 : t^2$$

d. h. die vom Anfang der Bewegung an durchlaufenen Wege verhalten sich wie die Quadrate der vom Anfang an verflossenen Zeiten.

§. 62.

Zusatz.

Aus den beiden Proportionen

$$C : c = T : t \quad §. 58;$$

$$\text{und } H : h = T^2 : t^2 \quad §. 61;$$

folgt sogleich

$$H : h = C^2 : c^2;$$

d. h. die vom Anfang der Bewegung an durchlaufenen Wege verhalten sich wie die Quadrate der erlangten Geschwindigkeiten.

§. 63.

Zusatz.

Setzt man in die drei Proportionen

$$C : c = T : t$$

$$H : h = T^2 : t^2$$

$$H : h = C^2 : c^2$$

für T, H, C die zusammengehörigen Werthe nemlich 1 für T; G für H, und 2G für C, so erhält man

$$2G : c = 1 : t$$

$$G : h = 1 : t^2$$

$$1 : h = 4G : c^2$$

und hieraus die 6 Formeln

$$\text{I.} \quad c = 2Gt$$

$$\text{II.} \quad t = \frac{c}{2G}$$

$$\text{III.} \quad h = Gt^2$$

$$\text{IV.} \quad t = \sqrt{\frac{h}{G}}$$

$$\text{V.} \quad h = \frac{c^2}{4G}$$

$$\text{VI.} \quad c = 2\sqrt{Gh}$$

aus welchen man, wenn G bekannt ist, in jedem Fall, in welchem eine der Größen c, t, h gegeben ist, die beiden andern dadurch bestimmen kann.

§. 64.

Zusatz.

Für den freien Fall nahe an der Oberfläche, unserer Erde ist bei sehr verdünnter Luft genauen Beobachtungen zufolge, die Größe des Weges in der ersten Secunde der Bewegung $= 15\frac{5}{8}$ Rheinländische Fuß. Bezeichnet man daher diese Zahl $15\frac{5}{8}$ oder $\frac{125}{8}$ oder 15,625 durch g, so ist, t in Secunden, c und h aber in Rheinländischen Fußen verstanden;

$$\text{I.} \quad c = 2gt$$

$$\text{II.} \quad t = \frac{c}{2g}$$

$$\text{III.} \quad h = gt^2 .$$

$$\text{IV.} \quad t = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$\text{V.}\quad h = \frac{c^2}{4g}$$

$$\text{VI.}\quad c = 2\sqrt{gh}$$

oder, den Zahlen-Werth für g gesetzt:

$$\text{I.}\quad c = 31{,}25.\ t$$

$$\text{II.}\quad t = 0{,}032.\ c$$

$$\text{III.}\quad h = 15{,}625.\ t^2$$

$$\text{IV.}\quad t = 0{,}253.\ \sqrt{h}$$

$$\text{V.}\quad h = 0{,}016.\ c^2$$

$$\text{VI.}\quad c = 7{,}9\sqrt{h}.$$

§. 65.

Lehrsatz.

Wenn eine bewegende Kraft P (in Pfunden) auf eine Masse M, deren Gewicht (in Pfunden) $= Q$ sein mag, einwirkt, und es ist die beschleunigende Kraft $\frac{P}{M}$ unveränderlich, so ist die Beschleunigung oder $G = g\frac{P}{Q}$; unter g (§. 64) die Zahl $\frac{125}{8}$ verstanden, welche Bedeutung dieser Buchstabe immer beibehalten soll.

Beweis.

Bei verschiedenen gleichförmig beschleunigten Bewegungen verhalten sich die Wege in der ersten Secunde wie die Größen der Kräfte, welche auf die Einheit der Materie wirken, d. h. wie die beschleunigenden Kräfte; beziehen sich daher die Größen P'; M'; Q'; G' eben so aufeinander, wie P, M, Q, G, so hat man

$$G : G' = \frac{P}{M} : \frac{P'}{M'}.$$

Es ist aber $Q : Q' = M : M'$, folglich auch

$$G : G' = \frac{P}{Q} : \frac{P'}{Q'}.$$

Für den freien Fall ist aber die Ueberwucht gleich dem Gewicht der bewegten Masse, also wenn P'; M'; Q'; G' auf den freien Fall bezogen werden

$$P' = Q' \text{ und } G' = g = 15\tfrac{5}{8}; \text{ daher}$$

$$G : g = \frac{P}{Q} : 1 \text{ und hieraus}$$

$$G = g\frac{P}{Q}.$$

§. 66.

Zusatz.

Setzt man den Werth $g\frac{P}{Q}$ oder $\frac{125}{8}\frac{P}{Q}$ für G in die Formeln §. 63, so erhält man

$$\text{I.}\quad c = 2g\frac{P}{Q}t$$

$$\text{II.}\quad t = \frac{cQ}{2gP}$$

$$\text{III.}\quad h = g\frac{P}{Q}t^2$$

$$\text{IV.}\quad t = \sqrt{\frac{hQ}{gP}}$$

$$\text{V.}\quad h = \frac{c^2 Q}{4gP}$$

$$\text{VI.}\quad c = 2\sqrt{g\frac{P}{Q}h}.$$

Anmerk. In der Folge soll unter dem Ausdruck beschleunigende Kraft immer der Werth von $\frac{P}{Q}$ (nicht der eigentliche Werth derselben, $\frac{P}{M}$) verstanden werden.

§. 67.

Zusatz.

Behalten c, t, h, P, Q, M die bisherige Bedeutung bei, und bezeichnen c′, t′, h′, P′, Q′, M Größen welche sich eben so auf einander beziehen, so ist

$$c = 2g\frac{P}{Q}t \text{ §. 66,}$$

und eben so

$$c' = 2g\frac{P'}{Q'}t'; \text{ also,}$$

wenn t und t′ gleich groß gedacht werden,

$$c : c' = \frac{P}{Q} : \frac{P'}{Q'}; \text{ oder}$$

$$P : P' = cQ : c'Q'; \text{ oder auch}$$

$$P : P' = cM : c'M'.$$

Ferner ist

$$c^2 = 4g\frac{P}{Q}h \text{ §. 66. VI.}$$

$$\text{und } c'^2 = 4g\frac{P'}{Q'}h'; \text{ also,}$$

wenn h und h′ gleich groß gedacht werden,

$$c^2 : c'^2 = \frac{P}{Q} : \frac{P'}{Q'}; \text{ oder}$$

$$P : P' = c^2 Q : c'^2 . Q'; \text{ oder auch}$$

$$P : P' = c^2 M : c'^2 . M'.$$

Erstere Vergleichung

$$P : P' = cM : c'M'$$

heißt das Cartesianische;

letztere

$$P : P' = c^2 M : c'^2 . M'$$

das Leibnitzische Kräftenmaaß.

§. 68.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper vom Gewicht Q schon eine Geschwindigkeit v in dem Augenblick besitzt, in welchen er nach derselben Richtung von einer Ueberwucht P ergriffen wird, so ist nach Verlauf von t Secunden seine erlangte Geschwindigkeit, oder

$$c = v + 2g\frac{P}{Q}t$$

und der in dieser Zeit t durchlaufene Weg, oder

$$h = vt + g\frac{P}{Q}t^2.$$

Beweis.

Man denke sich v, vom Augenblick des Ruhens an, durch dieselbe Ueberwucht P erst allmählig erzeugt, so ist die Zeit zu diesen Erfolg $= \frac{vQ}{2gP}$ §. 66. II, und der Weg, welchen der Körper dann durchlaufen haben müßte, um die Geschwindigkeit v erlanget zu haben $= \frac{v^2Q}{4gP}$ §. 66. V. Dieser Ansicht gemäß ist dann c die in der Zeit $\frac{vQ}{2gP} + t$, vom Anbeginn der Bewegung an, erlangte Geschwindigkeit, also nach §. 66. I.;

$$c = 2g\frac{P}{Q}\left(\frac{vQ}{2gP} + t\right); \text{ oder}$$

$$c = v + 2g\frac{P}{Q}t;$$

und h der Unterschied der vom Anfang der Bewe-

gung an, in den Zeiten $\frac{vQ}{2gP} + t$ und $\frac{vQ}{2gP}$ durchlaufenen Wege, von welchen der letztere $= \frac{v^2 Q}{4gP}$; der erstere aber nach §. 66. III.;

$$= g\frac{P}{Q}\left(\frac{vQ}{2gP} + t\right)^2 \text{ ist,}$$

so daß man also

$$h = g\frac{P}{Q}\left(\frac{vQ}{2gP} + t\right)^2 - \frac{v^2 Q}{4gP} \text{ hat.}$$

Reducirt man diese Formel, so entsteht

$$h = vt + g\frac{P}{Q}t^2.$$

§. 69.

Zusatz.

Aus den beiden Formeln

$$\text{I.} \quad c = v + 2g\frac{P}{Q}t.$$

$$\text{II.} \quad h = vt + g\frac{P}{Q}t^2.$$

ergeben sich durch Entwickelung noch folgende:

$$\text{III.} \quad v = c - 2g\frac{P}{Q}t.$$

$$\text{VI.} \quad t = \frac{(c-v)Q}{2gP}.$$

$$\text{V.} \quad v = \frac{hQ - gPt^2}{Qt}.$$

$$\text{VI.} \quad t = \frac{-vQ + \sqrt{v^2Q^2 + 4gPQh}}{2gP}.$$

$$\text{VII.} \quad h = ct - g\frac{P}{Q}t^2.$$

VIII.

$$\text{VIII.}\quad t = \frac{cQ - \sqrt{c^2Q^2 - 4gPQh}}{2gP}.$$

$$\text{IX.}\quad h = \frac{(c^2 - v^2)Q}{4gP}.$$

$$\text{X.}\quad c = \sqrt{v^2 + 4g\frac{P}{Q}h}.$$

$$\text{XI.}\quad v = \sqrt{c^2 - 4g\frac{P}{Q}h}.$$

$$\text{XII.}\quad c = \frac{hQ + gPt^2}{Qt}.$$

Ist $P = Q$, d. h. ist von freien Fall mit einer durch eine anderweitige Thätigkeit erzeugten anfänglichen Geschwindigkeit v, die Rede, so hat man folgende 12 Formeln

1) $c = v + 2gt$

2) $h = vt + gt^2$

3) $v = c - 2gt$

4) $t = \frac{c - v}{2g}$

5) $v = \frac{h - gt^2}{t}$

6) $t = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4gh}}{2g}$

7) $h = ct - gt^2$

8) $t = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4gh}}{2g}$

9) $h = \frac{c^2 - v^2}{4g}$

10) $c = \sqrt{v^2 + 4gh}$

$$11)\quad v = \sqrt{c^2 - 4gh}$$

$$12)\quad c = \frac{h + gt^2}{t}.$$

Aufgaben

zur Anwendung der Gesetze dieses zweiten Kapitels.

§. 70.

Aufgabe.

Wie tief fällt ein Körper in den ersten 10 Secunden, und welche Geschwindigkeit erlangt er?

Auflösung.

Nach §. 64 ist

$$h = \tfrac{125}{8} . 10^2 = 1562,5 \text{ und}$$
$$c = 31,25 . 10 = 312,5.$$

§. 71.

Aufgabe.

Ein Körper fällt frei 400 Fuß hoch herab; wie viel Zeit braucht er, und welches ist seine erlangte Geschwindigkeit?

Auflösun

Nach §. 64 ist

$$t = 0,253 \sqrt{400} = 5,06 \text{ und}$$
$$c = 7,9 \sqrt{400} = 1\ 8.$$

§. 72.

Aufgabe.

Ein frei fallender Körper soll 1000 Fuß Geschwindigkeit erlangen, wie hoch muß er herab fallen, und welche Zeit ist erforderlich?

Auflösung.

Nach §. 64 ist

$$h = 0{,}016 . 1000^2 = 16000$$
$$t = 0{,}032 . 1000 = 32.$$

§. 73.

Aufgabe.

Nach t Secunden hört der Beobachter das Auffallen eines der Schwere überlassenen Körpers; wie tief ist derselbe gefallen, wenn die Geschwindigkeit des Schalls $= v$ ist?

Auflösung.

Bezeichnet h die gesuchte Tiefe, so ist die Zeit, in welcher der Schall sich gleichförmig nach oben bewegt $= \frac{h}{v}$; folglich die Zeit des Falls $t - \frac{h}{v}$; demnach nach §. 64.

$$h = g\left(t - \frac{h}{v}\right)^2$$

und hieraus

$$h = \frac{v}{2g}(2gt + v - \sqrt{4gvt + v^2}).$$

Ist $t = 8$; $v = 1075$ Fuß, so erhält man $h = 818{,}677$ Fuß.

§. 74.

Aufgabe.

Ein fester Körper, schwerer wie Wasser, dessen specifisches Gewicht $=\beta$ und absolutes $=Q$ ist, wird ins Wasser gelegt. Man soll, aber ohne Berücksichtigung des Widerstandes, welchen das Ausweichen des Wassers entgegensetzt, die Zeit t bestimmen, in welcher derselbe zur Tiefe h sinkt.

Auflösung.

Der Gewichtsverlust des Körpers unter Wasser ist $=\frac{Q}{\beta}$ (§. 30) folglich die Ueberwucht $=Q-\frac{Q}{\beta}$, demnach nach §. 66. III.

$$t=\sqrt{\frac{hQ}{g.\left(Q-\frac{Q}{\beta}\right)}} \text{ oder}$$

$$t=\sqrt{\frac{h\beta}{g(\beta-1)}}.$$

Ist $h=200$; $\beta=\frac{5}{4}$, so erhält man $t=8$ Secunden.

§. 75.

Aufgabe.

Auf einer horizontalen Ebene liegt ein Körper vom Gewicht W; (*Fig.* 32) vermittelst eines horizontal geleiteten über eine Rolle geführten Fadens ist derselbe mit einem lothrecht herabhängenden Gewicht R verbunden; der Reibungs-Coefficient der gleitenden Reibung sei $=\mu$; die Reibung an den Zapfen der Rolle, so wie das Gewicht des Fadens

sei so unbedeutend, daß beides außer Betracht gelassen werden soll. Wenn nun $R > \mu W$ ist, und in der Zeit t von Anfang der Bewegung an gerechnet, der Weg h durchlaufen wird, wie werden diese Größen in eine Gleichung gebracht?

Auflösung.

Hier ist die Ueberwucht $= R - \mu W$; das Gewicht der bewegten Masse

$$= R + W;$$

folglich nach §. 66. III.

$$h = g \frac{R - \mu W}{R + W} . t^2.$$

Kennt man h und t durch eine Beobachtung, so kann man aus dieser Gleichung μ, d. h. den Reibungs-Coefficienten für gleitende Reibung während der Bewegung bestimmen.

§. 76.

Aufgabe.

Die Größe der Beschleunigung eines Körpers zu bestimmen, welcher auf einer schiefen Ebene herabgleitet.

Auflösung.

Das Gewicht des Körpers sei $= W$; der Reibungs-Coefficient $= \mu$; der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont $= \alpha$; so ist das abgleitende Bestreben $= W \operatorname{Sin} \alpha$; der Normaldruck $= W \operatorname{Cos} \alpha$; die daraus entspringende Reibung $= \mu W \operatorname{Cos} \alpha$; folglich die Ueberwucht

$$= W \operatorname{Sin} \alpha - \mu W \operatorname{Cos} \alpha;$$

also die beschleunigende Kraft

$$= \frac{W \operatorname{Sin} \alpha - \mu W \operatorname{Cos} \alpha}{W}$$

und folglich die Beschleunigung, oder

$$G = g (\operatorname{Sin} \alpha - \mu \operatorname{Cos} \alpha).$$

Wird die Reibung beiseite gesetzt, so hat man die beschleunigende Kraft $= \operatorname{Sin} \alpha$ und

$$G = g \operatorname{Sin} \alpha.$$

Setzt man die Höhe der schiefen Ebene $= a$; die Länge derselben $= l$; die Grundlinie $= b$; so ist

$$\operatorname{Sin} \alpha = \frac{a}{l}; \ \operatorname{Cos} \alpha = \frac{b}{l};$$

also mit Rücksicht auf Reibung

$$G = g \frac{a - \mu b}{l};$$

und ohne Rücksicht auf dieselbe

$$G = g \frac{a}{l}; \text{ oder}$$

$$G : g = a : l;$$

d. h. ohne Rücksicht auf Reibung verhält sich die Beschleunigung auf der schiefen Ebene zu der beim freien Fall wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben.

§. 77.

Aufgabe.

Es bezeichnen t, h, c zusammen gehörige Werthe für die von Anfang an verflossene Zeit, den durchlaufenen Weg und die erlangte Geschwindigkeit beim freien Fall; T, H, C ebenfalls zusammen gehörige Werthe für die vom Anfang der Be-

wegung an verflossene Zeit, den durchlaufenen Weg und die erlangte Geschwindigkeit bei Bewegung auf einer schiefen Ebene, aber ohne Berücksichtigung der Reibung; man soll diese Größen unter einander vergleichen.

Auflösung.

Es ist $C = 2g\frac{a}{l}.T$ und

$$c = 2gt$$

also, wenn $T = t$ ist

$$C : c = a : l;$$ d. h.

1) die in irgend einer Zeit erlangte Geschwindigkeit bei der Bewegung auf einer schiefen Ebene verhält sich zu der in derselben Zeit beim freien Fall erlangten Geschwindigkeit wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben.

Es ist ferner

$$H = g\frac{a}{l}T^2$$

und $h = gt^2$

also, für $T = t$,

$$H : h = a : l;$$ d. h.

2) der in irgend einer Zeit auf einer schiefen Ebene durchlaufene Weg verhält sich zu dem in derselben Zeit beim freien Fall durchlaufenen, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Aus $H : h = a : l$, läßt sich wenn a, l und

eine der Größen H, h gegeben ist, die andere durch eine geometrische Construktion darstellen, auch erhellet daraus die Richtigkeit des Galiläischen Gesetzes, daß der lothrechte Durchmesser eines Kreises, und jede in denselben Kreis von einem der Endpunkte dieses Durchmessers aus, gezogene Sehne, in gleichen Zeiten durchlaufen werden.

Ferner hat man, wenn H = l und h = a ist;

$$l = g\frac{a}{l}T^2$$

und $a = gt^2$, also

$$T : t = l : a;$$ d. h.

3) die Zeit in welcher ein Körper die Länge einer schiefen Ebene durchläuft, verhält sich zu der, in welcher ein anderer frei durch die Höhe derselben fällt, wie die Länge der schiefen Ebene zur Höhe derselben.

Endlich hat man noch, wenn H = l und h = a ist;

$$C = 2\sqrt{g\frac{a}{l}.l}$$

und $c = 2\sqrt{ga}$; also

$$C = c;$$ d. h.

4) wenn ein Körper die Länge der schiefen Ebene frei herabgleitet, ein anderer beim freien Fall die lothrechte Höhe derselben durchläuft, so erlangen beide gleiche Geschwindigkeit.

§. 78.

Aufgabe.

Auf zwei zusammenhängenden schiefen Ebenen mit den Winkeln α, β (*Fig.* 33.) gegen den Horizont, liegen zwei vermittelst eines, parallel mit den schiefen Ebenen geleiteten, gewichtlosen Fadens mit einander verbundene Gewichte V, W. Der Reibungs-Coefficient für gleitende Reibung sei $= \mu$; der für die Reibung an den Zapfen der Rolle $= \mu'$. Es wird vorausgesetzt, daß eine Bewegung dem Bestreben von V entsprechend erfolge, man soll den in der Zeit t zurückgelegten Weg h und die erlangte Geschwindigkeit c bestimmen.

Auflösung.

Hier ist die Spannung nach der Richtung ab $= V \operatorname{Sin}\alpha - \mu V \operatorname{Cos}\alpha$; die nach der Richtung ac $= W \operatorname{Sin}\beta + \mu W \operatorname{Cos}\beta$, folglich der Druck auf die Zapfen der Rolle, ohne Berücksichtigung des unbedeutenden Gewichts, der Rolle selbst,

$$= \sqrt{\begin{bmatrix}(V\operatorname{Sin}\alpha - \mu V\operatorname{Cos}\alpha)^2 + (W\operatorname{Sin}\beta + \mu W\operatorname{Cos}\beta)^2 \\ -2(V\,S\alpha - \mu V\,C\alpha)(W\,S\beta + \mu W\,C\beta)C(\alpha+\beta)\end{bmatrix}}$$

welchen D ausdrücken soll. Ist nun der Halbmesser der Zapfen $= \varrho$; der der Rolle $= r$, so ist der in den Faden reducirte Reibungs-Widerstand

$$= \frac{\varrho\mu' D}{r};$$

folglich die Ueberwucht

$$= V\operatorname{Sin}\alpha - \mu V\operatorname{Cos}\alpha - W\operatorname{Sin}\beta - \mu W\operatorname{Cos}\beta - \frac{\varrho\mu' D}{r}.$$

demnach die Beschleunigung oder

$$G = g \frac{V \mathrm{Sin}\alpha - \mu V \mathrm{Cos}\alpha - W \mathrm{Sin}\beta - \mu W \mathrm{Cos}\beta - \frac{\varrho \mu' D}{r}}{V + W}$$

$$\text{also} \quad h = G t^2$$

$$c = 2 G t.$$

§. 79.

Aufgabe.

Ein Körper wird lothrecht herab geworfen, und die ihm im ersten Augenblick des Falls mitgetheilte Geschwindigkeit ist $= v$; welche Höhe h muß er herab fallen um die Geschwindigkeit c zu erlangen, und welche Zeit t ist hierzu erforderlich?

Auflösung.

Nach §. 69. 9, ist

$$h = \frac{c^2 - v^2}{4g} \text{ und nach 4,}$$

$$t = \frac{c - v}{2g}.$$

§. 80.

Aufgabe.

Ein Körper von 20 ℔ Gewicht bewegt sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von 12 Fuß; (wie immer für die Secunde verstanden) er wird jetzt nach derselben Richtung von einer gewichtlosen Uebertwucht ergriffen, und durchläuft von jetzt an in 5 Secunden einen Weg von 100 Fuß; wie groß ist die Uebertwucht P?

Auflösung.

Nach §. 69. 2, ist

$$h = vt + g\frac{P}{Q}.t^2$$ also hier

$$100 = 12.5 + \tfrac{125}{8}.\frac{P}{20}.5^2$$; und hieraus

$$P = 2{,}048.$$

Drittes Kapitel.

Von der ungleichförmig beschleunigten Bewegung.

---

§. 81.

Lehrsatz.

Wenn während einer Zeit t eine veränderliche beschleunigende Kraft wirkt, welche als Funktion von t auszudrücken ist, und man bezeichnet ihre Größe, im letzten Augenblick von t durch ft, so ist die im letzten Augenblick von t erlangte Geschwindigkeit, oder

$$c = 2g\int ft.\,dt$$

und der in der Zeit t durchlaufene Weg oder

$$h = 2g\int\int ft.\,dt$$ oder auch

$$h = \int c\,dt.$$

Beweis.

Man setze $c = Ft$; $h = \varphi t$; wächst nun t um k, so ist die beschleunigende Kraft im ersten

Augenblick der Zeit $k = ft$ im letzten $= f(t+k)$. Wäre sie immer $= ft$, so wäre nach §. 69. I.

$$F(t+k) = Ft + 2g.ft.k$$ und nach II;

$$\varphi(t+k) - \varphi t = kFt + gft.k^2;$$

wäre sie aber immer $= f(t+k)$ während der Zeit k, so wäre

$$F(t+k) = Ft + 2gf(t+k).k$$ und

$$\varphi(t+k) - \varphi t = kFt + gf(t+k).k^2.$$

Es ist daher

$$F(t+k) > Ft + 2gft.k$$ und

$$F(t+k) < Ft + 2gf(t+k).k.$$

Eben so ist

$$\varphi(t+k) - \varphi t > kFt + g.ft.k^2$$ und

$$\varphi(t+k) - \varphi t < kFt + gf(t+k).k^2.$$

Nothwendig muß also ein zwischen o und k liegender Werth k′ existiren, für welchen

$$F(t+k) = Ft + 2gf(t+k')$$ ist,

und eben so ein zwischen diese Gränzen o und k fallender k″, für welchen

$$\varphi(t+k) - \varphi t = kFt + gf(t+k'').k^2$$ ist.

Entwickelt man nun $F(t+k)$ und $\varphi(t+k)$ nach der taylorschen Reihe, und dividirt durch k, so erhält man die beiden Gleichungen

$$F't + \frac{k}{2}F''t + \ldots\ldots = 2gf(t+k')$$ und

$$\varphi't + \frac{k}{2}\varphi''t + \ldots\ldots = Ft + gf(t+k'').k.$$

Für $k = o$; also auch $k' = o$ und $k'' = o$; ergiebt sich nun sogleich

$$F't = 2gft$$ und

$$\varphi't = Ft;$$ also

$$\text{I.}\quad c = Ft = 2g\int ft \text{ und}$$
$$\text{II.}\quad h = \varphi t = \int Ft = \int c = 2g\int^2 ft.$$

§. 82.

Lehrsatz.

Wenn während der Durchlaufung eines Weges h eine veränderliche, beschleunigende Kraft wirkt, welche als Funktion des Weges auszudrücken ist, und man bezeichnet ihre Größe im letzten Punkt des Weges h durch fh, so ist die erlangte Geschwindigkeit, oder

$$c = \sqrt{4g\int fh\,dh}$$

und die verflossene Zeit, oder

$$t = \int \frac{dh}{\sqrt{4g\int fh\,dh}} \text{ oder auch}$$

$$t = \int \frac{1}{c} = \int \frac{1}{\quad} dh.$$

Beweis.

Setzt man $c = Fh$; $t = \varphi h$ und denkt sich h um k gewachsen, so ist

$$F(h+k) > \sqrt{(Fh)^2 + 4g\,fh.\,k} \text{ und}$$
$$F(h+k) < \sqrt{(Fh)^2 + 4g\,f(h+k).\,k};$$

siehe §. 69. Nr. X.

und eben so nach der Formel

$$t = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4gh\frac{P}{Q}}}{2g\frac{P}{Q}}$$

siehe §. 69. VI.

$$\varphi(h+k) - \varphi h < \frac{-Fh + \sqrt{(Fh)^2 + 4gk.\,fh}}{2g\,fh}; \text{ und}$$

$$\varphi(h+k)-\varphi h > \frac{-Fh+\sqrt{(Fh)^2+4gk.f(h+k)}}{2gf(h+k)}.$$

Nothwendig müssen also Werthe k'; k'' zwischen o und k existiren, für welche

$$F(h+k) = \sqrt{(Fh)^2+4gk.f(h+k')} \text{ und}$$

$$\varphi(h+k)-\varphi h = \frac{-Fh+\sqrt{(Fh)^2+4gkf(h+k'')}}{2gf(h+k'')} \text{ ist.}$$

Aus der ersten Gleichung entspringt

$$F(h+k)^2 - Fh^2 = 4gkf(h+k'); \text{ oder,}$$

nach Anwendung der taylorschen Reihe wenn man dann durch k dividirt:

$$2Fh.F'h+k(F'h^2+FhF''h)+\ldots = 4gf(h+k')$$

und hieraus für $k=o$; also auch $k'=o$;

$$2Fh.F'h = 4gfh$$

also, wenn man integrirt

$$(Fh)^2 = 4g\int fh \text{ oder}$$

$$\text{III.} \quad c = Fh = \sqrt{4g\int fh}.$$

Aus der zweiten Gleichung entsteht

$$2gf(h+k'')[\varphi(h+k)-\varphi h]+Fh=\sqrt{(Fh)^2+4gkf(h+k'')}$$

oder quadrirt, dann $(Fh)^2$ subtrahirt, die taylorsche Reihe angewandt und mit $4gkf(h+k'')$ dividirt,

$$gkf(h+k'')(\varphi'h+\frac{k}{2}\varphi''h+\ldots)^2+Fh(\varphi'h+\frac{k}{2}\varphi''h+\ldots)=1$$

und hieraus, wenn man k also auch $k''=o$ setzt;

$$Fh.\varphi'h = 1 \text{ also}$$

$$dt = \varphi'h = \frac{1}{Fh} = \frac{1}{c};$$

folglich

$$\text{IV.} \; t = \varphi h = \int\frac{1}{Fh} = \int\frac{1}{c} = \int\frac{1}{\sqrt{4g\int fh}}.$$

§. 83.

Lehrsatz.

Wenn während der Erlangung einer Geschwindigkeit c eine veränderliche beschleunigende Kraft wirkt, welche als Funktion der jedesmaligen Geschwindigkeit auszudrücken ist, und man bezeichnet die Größe derselben, für den Augenblick, wo die Geschwindigkeit den Werth c erlangt hat, mit fc, so ist die verflossene Zeit, oder

$$t = \frac{1}{2g} \cdot \int \frac{1}{fc} \, dc$$

und der durchlaufene Weg, oder

$$h = \frac{1}{2g} \int \frac{c}{fc} \, dc.$$

Beweis.

Setzt man $t = Fc$; $h = \varphi c$, und denkt sich c um k gewachsen, so ergiebt sich, ganz wie in §. 81 und 82, nach §. 69. IV und IX., wenn k', k'' zwischen o und k liegend, gedacht werden

$$F(c+k) - Fc = \frac{c+k-c}{2g f(c+k')} \text{ und}$$

$$\varphi(c+k) - \varphi c = \frac{(c+k)^2 - c^2}{4g f(c+k'')}.$$

Aus beiden Formeln folgt

$$dt = F'c = \frac{1}{2gfc};$$

$$dh = \varphi' c = \frac{c}{2gfc};$$

und hieraus

$$\text{V.}\quad t = Fc = \frac{1}{2g}\int\frac{1}{fc}$$

$$\text{VI.}\quad h = \varphi c = \frac{1}{2g}\int\frac{c}{fc}.$$

§. 84.

Zusatz.

Ist die beschleunigende Kraft unveränderlich, immer $= \frac{P}{Q}$; so folgt aus I. §. 81.

$$c = Ft = 2g\int\frac{P}{Q} = 2g\frac{P}{Q}t + \text{Const.}$$

und war die Geschwindigkeit $= v$ wie $t = o$ war Const. $= v$; also

$$c = v + 2g\frac{R}{Q}t \text{ wie §. 69. I.]}$$

Ferner aus II. §. 82.

$$h = \varphi t = \int\left(v + 2g\frac{P}{Q}t\right) = vt + g\frac{P}{Q}t^2$$

wie §. 69. II., indem keine Const. hinzukommt, weil mit $t = o$; auch $h = o$ wird.

Ferner aus III. §. 82.

$$c = Fh = \sqrt{4g\int\frac{P}{Q}} = 2\sqrt{g\frac{P}{Q}h + \text{Const.}}$$

und war die Geschwindigkeit $= v$ wie $h = o$ war;

$$v = 2\sqrt{\text{Const.}} \text{ also Const.} = \frac{v^2}{4}; \text{ also}$$

$$c = \sqrt{v^2 + 4g\frac{P}{Q}h} \text{ wie §. 69. X.}$$

Dann

Dann, aus IV. §. 82.

$$t = \varphi h = \int \frac{1}{\sqrt{v^2 + 4g\frac{P}{Q}h}} . dh \text{ oder}$$

$$t = \frac{Q}{2gP}\sqrt{v^2 + 4g\frac{P}{Q}h} + C.$$

Für $h = 0$; ist auch $t = 0$; also

$$C = \frac{-Q}{2gP} v; \text{ folglich}$$

$$t = \frac{-vQ + \sqrt{v^2Q^2 + 4gPQh}}{2gP}$$

wie §. 69. VI.

Ferner aus V. §. 83.

$$t = Fc = \frac{1}{2g}\int\frac{Q}{P} = \frac{cQ}{2gP} + C$$

und war $c = v$ als $t = 0$ war,

$$C = -\frac{vQ}{2gP} \text{ also}$$

$$t = \frac{(c-v)Q}{2gP} \text{ wie §. 69. IV.}$$

Endlich aus VI. §. 83.

$$h = Qc = \frac{1}{2g}\frac{Q}{P}\int c = \frac{Qc^2}{4gP} + C$$

und war $h = 0$; als $c = v$ war;

$$C = -\frac{Qv^2}{4gP}; \text{ folglich}$$

$$h = \frac{(c^2 - v^2)Q}{4gP} \text{ wie §. 69. IX.}$$

Aufgaben

zur Anwendung der Lehren dieses dritten Kapitels.

§. 85.

Aufgabe.

Auf einer horizontalen Ebene *Fig.* 32 ruht ein Gewicht $= W$ ℔ und ist durch ein horizontal geleitetes Seil, von welchen jeder Längenfuß p ℔ wiegt, vermittelst einer Rolle mit einem lothrecht herab hängenden Gewicht $= R$ ℔ verbunden. Der Reibungs-Coefficient für gleitende Reibung sei $= \mu$; die Rolle mit ihren Zapfen sei so zart gearbeitet, daß die Zapfen-Reibung außer Betracht gelassen werden kann. Wenn nun auch das Seil so biegsam angenommen wird, daß die Steifheit desselben unberücksichtigt bleiben kann, so soll unter der Voraussetzung daß $R > \mu W$ ist, bestimmt werden in welcher Zeit t, der Weg h, vom Beginn der Bewegung an, durchlaufen wird, und wie groß die am Ende erlangte Geschwindigkeit c ist.

Auflösung.

Im Augenblick in welchen der Weg h durchlaufen ist, ist, wenn a die Länge des anfänglichen horizontalen, b die des verticalen Seilstücks bezeichnet, die Ueberwucht

$$= R + (b + h)p - \mu W$$

oder $R + bp - \mu W$ durch n ausgedrückt,

$$= n + ph$$

und das Gewicht der bewegten Masse

$$= R + (a + b) p + W$$

welches durch Q bezeichnet werden soll, daher die beschleunigende Kraft, oder

$$fh = \frac{n + ph}{Q}$$; also nach §. 82. III.

$$c^2 = 4g \int \frac{n + ph}{Q} = \frac{4g}{Q} (nh + \tfrac{1}{2} ph^2)$$

folglich

$$c = 2\sqrt{gh} . \sqrt{\frac{2n + ph}{2Q}} .$$

Ferner ist nach IV.

$$t = \int \frac{dh}{c} = \sqrt{\frac{Q}{2g}} \int \frac{dh}{\sqrt{2nh + ph^2}}$$

oder $h = F\beta = \frac{2n}{p} \tang \beta^2$ gesetzt,

$$t = \frac{2}{\sqrt{p}} . \sqrt{\frac{Q}{2g}} \int \operatorname{Sec}\beta . d\beta$$

$$= 2\sqrt{\frac{Q}{2pg}} . \ln (\tang\beta + \operatorname{Sec}\beta) + C$$

(siehe meine Analysis. pag. 77. III.)

$$= 2\sqrt{\frac{Q}{2pg}} . \ln \frac{\sqrt{ph} + \sqrt{2n + ph}}{\sqrt{2n}}$$

oder auch

$$t = \sqrt{\frac{Q}{2pg}} . \ln \frac{n + ph + \sqrt{ph (2n + ph)}}{n} .$$

Beispiel. Ist W = 100; R = 40; a = 60; b = 10; p = 1; h = 60; also n = 25; Q = 210, so entsteht c = 31,3; t = 4,9.

§. 86.

Aufgabe.

Auf eine unveränderliche Masse, deren Gewicht $= Q$ ist, wirkt eine Ueberwucht, deren Größe im ersten Augenblick der Einwirkung auf die noch ruhende Masse, $= P$ ist, welche aber gleichförmig wächst, dergestalt, daß sie im Laufe jeder Secunde $\frac{1}{n}$ größer wird, als sie am Anfang derselben war. Welche Geschwindigkeit wird in der Zeit t erlangt, und wie groß ist der in dieser Zeit durchlaufene Weg h?

Auflösung.

Zu Anfang der ersten Secunde ist die Ueberwucht $= P$; zu Ende derselben ist sie

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) P;$$

zu Anfang der zweiten ist sie

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) P$$

und zu Ende derselben

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) P + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) P = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 . P$$

u. s. w.

also, für jeden Werth von t, zu Ende der $t$ten Secunde

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^t . P;$$

oder, $\frac{1}{n} = z$ gesetzt,

$$= (1 + z)^t . P.$$

Man hat also nach §. 81. I.

$$c = 2g\int \frac{(t+z)^t . P}{Q} dt$$

$$= \frac{2gP}{Q} \int (1+z)^t . dt$$

$$= \frac{2gP}{Q} . \frac{(1+z)^t}{\ln(1+z)} + \text{Const.}$$

(Meine Analys. pag. 66. Nr. XVII.)

Für $t = 0$ ist auch $c = 0$; also

$$\text{Const.} = -\frac{2gP}{Q} . \frac{1}{\ln(1+z)}; \text{ folglich}$$

$$c = \frac{2gP}{Q \ln(1+z)} . [(1+z)^t - 1].$$

Ferner ist nach §. 81. II.

$$h = \int \frac{2gP}{Q \ln(1+z)} [(1+z)^t - 1] dt$$

$$= \frac{2gP}{Q \ln(1+z)} . \left[\frac{(1+z)^t}{\ln(1+z)} - t\right] + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ ist auch $h = 0$; also

$$\text{Const.} = -\frac{2gP}{Q \ln(1+z)} . \frac{1}{\ln(1+z)}; \text{ folglich}$$

$$h = \frac{2gP}{Q \ln(1+z)} . \left[\frac{(1+z)^t - 1}{\ln(1+z)} - t\right].$$

Beispiel.

Für $Q = 100$; $P = 36$; $t = 10$; $n = 3$; also $\frac{1}{n} = z = \frac{1}{3}$ erhält man

$$c = 655{,}32; \quad h = 1887{,}125.$$

§. 87.

Zusatz.

Setzt man $z = o$; so muß aus der Formel

$$c = \frac{2gP}{Q} \cdot \frac{(1+z)^t - 1}{\ln(1+z)} \text{ die } c = 2g\frac{P}{Q}t;$$

und aus der

$$h = \frac{2gP}{Q} \cdot \frac{(1+z)^t - 1 - t\ln(1+z)}{[\ln(1+z)]^2} \text{ die}$$

$$h = g\frac{P}{Q}t^2 \text{ entstehen.}$$

Um diese Resultate, welche nothwendig sich ergeben müssen, zu erhalten, muß man §. 46 und 47 meiner Analysis anwenden.

Eben so erhält man aus den beiden Formeln §. 85, wenn $p = o$ gesetzt wird

$$c^2 = 4g\frac{R - \mu W}{Q} h \text{ und}$$

$$t = \sqrt{\frac{hQ}{4g(R - \mu W)}}.$$

§. 88.

Aufgabe.

Auf einer horizontalen Ebene *Fig.* 32 ruhe eine Masse vom Gewicht W; die Materie der Ebene und der Masse sollen von der Art sein, daß der Reibungs-Coefficient der gleitenden Reibung für den Stand der Ruhe $= \mu$, für Bewegung aber desto kleiner sei, je größer die Geschwindigkeit ist, und zwar dergestalt daß Erfahrungen zufolge für die Geschwindigkeit c der Reibungs-Coefficient

$= \frac{n}{n+c} . \mu$ ist, wobei n eine durch Beobachtungen bekannte Zahl bezeichnet. Durch ein horizontal laufendes über eine Rolle geleitetes Seil sei W mit einem lothrecht herab hängenden Gewicht R verbunden, und R sei größer als μ W. Wenn nun das Gewicht des Seils und der Rolle, so wie auch die Zapfenreibung außer Betracht gelassen werden, so soll man bestimmen in welcher Zeit t die Geschwindigkeit c erreicht wird und welcher Weg h bis dahin durchlaufen werden wird.

Auflösung.

In dem Augenblick in welchen die Geschwindigkeit c erreicht ist, ist der Reibungs-Widerstand $= \frac{n}{n+c} \mu W$ also die Ueberwucht

$$= R - \frac{n}{n+c} . \mu W;$$

folglich die beschleunigende Kraft, oder (§. 83.)

$$fc = \frac{R - \frac{n}{n+c} \mu W}{R+W}; \text{ also}$$

$$t = \frac{1}{2g} \int \frac{R+W}{R - \frac{n}{n+c} \mu W} . dc.$$

Man setze $R - \frac{n}{n+c} \mu W = x$ und der Kürze halber $R - \mu W = a$; so hat man

$$c = fx = n . \frac{x-a}{R-x}; \text{ folglich}$$

$$t = n \mu W \frac{R+W}{2g} . \int \frac{dx}{x(R-x)^2} .$$

Es ist aber (§. 6, meiner Analysis)

$$\frac{1}{x(R-x)^2} = \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{x} + \frac{2R-x}{(R-x)^2}\right] \text{ daher}$$

$$t = \frac{n\mu W(R+W)}{2gR^2}\left[\int\frac{dx}{x} + 2R\int\frac{dx}{(R-x)^2} - \int\frac{xdx}{(R-x)^2}\right].$$

Nun ist $\int\frac{dx}{x} = \ln x$

$$\int\frac{dx}{(R-x)^2} = -\int(R-x)^{-2}d(R-x) = \frac{1}{R-x};$$

$$\int\frac{xdx}{(R-x)^2} = \int x.\, d\frac{1}{R-x} = \frac{x}{R-x} - \int\frac{dx}{R-x}$$

$$= \frac{x}{R-x} + \int\frac{d(R-x)}{R-x}$$

$$= \frac{x}{R-x} + \ln(R-x) \text{ also}$$

$$t = \frac{n\mu W(R+W)}{2gR^2}\left(\frac{2R-x}{R-x} + \ln\frac{x}{R-x}\right) + C$$

oder, wenn man den Werth für x setzt,

$$t = \frac{n\mu W(R+W)}{2gR^2}\left[1 + \frac{(n+c)R}{n\mu W} + \ln\left[\frac{(n+c)R}{n\mu W} - 1\right]\right] + C$$

Für $c = 0$ ist auch $t = 0$; also

$$\text{Const} = \frac{n\mu W(R+W)}{2gR^2}\left(-1 - \frac{nR}{n\mu W} - \ln\frac{nR - n\mu W}{n\mu W}\right)$$

demnach vollständig

$$t = \frac{n\mu W(R+W)}{2gR}\left[\frac{cR}{n\mu W} + \ln\frac{(n+c)R - n\mu W}{nR - n\mu W}\right]$$

oder

$$t = \frac{c(R+W)}{2gR} + \frac{n\mu W(R+W)}{2gR^2}\ln\left(1 + \frac{c}{n}\,\frac{R}{R-\mu W}\right).$$

Ferner ist

$$h = \frac{1}{2g}\int \frac{c}{fc}\,dc,$$

oder, mit beibehaltener Bezeichnung

$$h = \frac{n^2\mu W(R+W)}{2g}\int \frac{x-a}{x(R-x)^3}\,dx.$$

Es ist aber $\int \frac{x-a}{x(R-x)^3}\,dx$

$$= \int \frac{dx}{(R-x)^3} - a\int \frac{dx}{x(R-x)^3};$$ und

$$\int \frac{dx}{(R-x)^3} = \frac{1}{2(R-x)^2};$$

$$\frac{1}{x(R-x)^3} = \frac{1}{R^3}\left[\frac{1}{x} + \frac{3R^2 - 3Rx + x^2}{(R-x)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{R^3}\left[\frac{1}{x} + \frac{(R-x)^2 + 2R^2 - Rx}{(R-x)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{R^3}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{R-x} + \frac{2R^2}{(R-x)^3} - \frac{Rx}{(R-x)^3}\right]$$

also

$$\int \frac{dx}{x(R-x)^3} = \frac{1}{R^3}\left[\ln x - \ln(R-x) + \frac{R^2}{(R-x)^2} - R.\int \frac{x}{(R-x)^3}\right]$$

aber $\int \frac{x}{(R-x)^3} = \int x.\, d\,\frac{1}{2(R-x)^2}$

$$= \frac{x}{2(R-x)^2} - \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{(R-x)^2} = \frac{x}{2(R-x)^2} - \frac{1}{2(R-x)}$$

folglich

$$\int\frac{dx}{x(R-x)^3}=\frac{1}{R^3}\left[\ln\frac{x}{R-x}+\frac{R^2}{(R-x)^2}-\frac{Rx}{2(R-x)^2}+\frac{R}{2(R-x)}\right]$$

$$=\frac{1}{R^3}\cdot\left[\ln\frac{x}{R-x}+\frac{3R^2-2Rx}{2(R-x)^2}\right]$$

demnach

$$\int\frac{x-a}{x(R-x)^3}=\frac{1}{2(R-x)^2}-\frac{a}{R^3}\left[\ln\frac{x}{R-x}\right.$$

$$\left.+\frac{3R^2-2Rx}{2(R-x)^2}\right]$$

$$=\frac{R^3-3aR^2+2aRx}{2R^2(R-x)^2}-\frac{a}{R^3}\ln\frac{x}{R-x}$$

folglich

$$h=\frac{n^2\mu W(R+W)}{2gR^3}\left[\frac{R^3-3aR^2+2aRx}{2(R-x)^2}-a\ln\frac{x}{R-x}\right]$$

oder, wenn man für x und a die Werthe setzt

$$h=\frac{n^2\mu W(R+W)}{2gR^3}\left[R.\frac{c^2R-n^2R+2n(c+n)\mu W}{2n^2\mu W}\right.$$

$$\left.-(R-\mu W)\ln\frac{n(R-\mu W)+cR}{n\mu W}\right]+C.$$

Für $c=0$ ist auch $h=0$; also

$$\text{Const.}=\frac{n^2\mu W(R+W)}{2gR^3}\left[R\frac{n^2R-2n^2\mu W}{2n^2\mu W}\right.$$

$$\left.+(R-\mu W)\ln\frac{n(R-\mu W)}{n\mu W}\right]$$

daher vollständig

$$h=\frac{n^2\mu W(R+W)}{2gR^3}\left[R\frac{c^2R+2nc\mu W}{2n^2\mu W}-(R-\mu W)\right.$$

$$\ln\left(1+\frac{cR}{n(R-\mu W)}\right)\Bigg]$$

oder auch

$$h = \frac{c^2(R+W)}{4gR} + \frac{nc\mu W(R+W)}{2gR^2}$$

$$-\frac{n^2\mu W(R+W)(R-\mu W)}{2gR^3}\ln\left(1+\frac{cR}{n(R-\mu W)}\right).$$

Beispiel. Ist $W = 180$; $R = 70$; $\mu = \frac{1}{3}$; $c = 20$ und der Reibungs-Coefficient im letzten Augenblick $= \frac{5}{18}$; folglich $\frac{n}{n+20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{18}$; daher $n = 100$; so ergiebt sich

$$t = 10{,}86;\quad h = 96{,}26.$$

Wäre der Reibungs-Coefficient $= 0$; so hätte man

$$t = 2{,}285;\quad h = 22{,}857.$$

Wäre derselbe immer $= \frac{5}{18}$, so wäre

$$t = 8;\quad h = 80.$$

Wäre er immer $= \frac{1}{3}$; so wäre

$$t = 16;\quad h = 160.$$

§. 89.

Aufgabe.

Ein schwerer Körper wird aus einem Punkt p welcher in der Höhe H über der Oberfläche unserer Erde sich befindet, frei den Einwirkungen der Schwere überlassen. Man soll die Zeit t des Falls durch die Höhe x, von p an, gerechnet, und die erlangte Geschwindigkeit c mit Rücksicht auf die veränderliche Anziehungskraft unserer Erde, d. h. mit Rücksicht auf das Gesetz bestimmen: daß sich

die anziehende Kraft unserer Erde auf Punkte in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkt derselben, umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von diesem Mittelpunkt, verhält.

Auflösung.

Bezeichnet r den mittleren Halbmesser unserer Erde, so ist die beschleunigende Kraft in den Endpunkten von $r = 1$; (siehe §. 65.) also, wenn dieselbe für den Endpunkt von x durch fx ausgedrückt wird

$$1 : fx = (r + H - x)^2 : r^2; \text{ folglich}$$

$$fx = \frac{r^2}{(r + H - x)^2};$$

oder $r + H$ durch e ausgedrückt,

$$fx = \frac{r^2}{(e - x)^2};$$

also nach §. 82. III.

$$c^2 = 4g\int fx \, . \, dx = 4gr^2 \int \frac{dx}{(e-x)^2}$$

$$= 4gr^2 \, . \, \frac{1}{e - x} + C.$$

Für $x = 0$ ist auch $c = 0$; also

$$\text{Const.} = -4gr^2 \, . \, \frac{1}{e}; \text{ daher}$$

$$c^2 = 4gr^2 \, . \, \frac{x}{e(e-x)}; \text{ also}$$

$$c = 2r\sqrt{\frac{gx}{e(e-x)}}.$$

Für $x = H$ entsteht hieraus

$$c = 2r\sqrt{\frac{gH}{r(r+H)}} \text{ oder}$$

$$c = 2\sqrt{gH.\frac{r}{r+H}};$$

Ist nun H unbedeutend klein gegen r, so kann man $\frac{r}{r+H} = 1$ setzen, und hat

$$c = 2\sqrt{gH} \text{ wie §. 63. VI.}$$

Ist H groß, etwa $H = r$; so entsteht

$$c = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}gH} = \sqrt{2gH}.$$

Aus §. 82. Nr. VI. folgt ferner

$$t = \int\frac{1}{c} = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{e}{g}}.\int\sqrt{\frac{e-x}{x}}.dx$$

oder $x = \varphi\beta = e \operatorname{Cos}\beta^2$ gesetzt

$$t = -\frac{e\sqrt{e}}{r\sqrt{g}}\int \operatorname{Sin}\beta^2.d\beta$$

$$= -\frac{e\sqrt{e}}{2r\sqrt{g}}.(\beta - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta) + C$$

(Analysis §. 80. I.);

$$= -\frac{e\sqrt{e}}{2r\sqrt{g}}[\operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\sqrt{\frac{x}{e}} - \frac{1}{e}\sqrt{(e-x)x}] + C$$

Für $x = 0$, ist auch $t = 0$; also

$$\text{Const.} = \frac{e\sqrt{e}}{2r\sqrt{g}}.\tfrac{1}{2}\pi; \text{ folglich}$$

$$t = \frac{e\sqrt{e}}{2r\sqrt{g}}[\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\sqrt{\frac{x}{e}} + \frac{1}{e}\sqrt{(e-x)x}].$$

Für $x = H$ entsteht hieraus

$$t = \frac{e\sqrt{e}}{2r\sqrt{g}}(\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\sqrt{\frac{H}{e}} + \frac{1}{e}\sqrt{r.H}).$$

Ist nun H unbedeutend klein gegen r, so daß man r für r + H = e und den Bogen selbst für den Sinus schreiben kann, so entsteht

$$t = \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{H}{r}} + \sqrt{\frac{H}{r}}\right) = \sqrt{\frac{H}{g}}$$

wie §. 63. IV.

Ist H groß, etwa = r, so entsteht

$$t = \frac{\pi + 2}{2\sqrt{2}} . \sqrt{\frac{H}{g}} .$$

Viertes Kapitel.

Von der gleichförmig verzögerten Bewegung.

---

§. 90.

Erklärung.

Wenn eine schon bestehende Bewegung allmählig durch eine fortdaurend widerstrebende Thätigkeit aufgehoben wird, so heißt eine solche mit (bis zu Null,) abnehmender Geschwindigkeit fortgesetzte Bewegung, eine verzögerte; und zwar eine gleichförmig verzögerte, wenn die beschleunigende Kraft der entgegenwirkenden Thätigkeit unveränderlich; eine ungleichförmig verzögerte aber, wenn die beschleunigende Kraft $\frac{P}{Q}$ der entgegenwirkenden Thätigkeit veränderlich ist. Die beschleunigende Kraft der, der ursprüng-

lich bestehenden Bewegung, entgegenwirkenden Thätigkeit, heißt in Beziehung auf diese, die verzögernde Kraft.

§. 91.

Lehrsatz.

Wenn eine unveränderliche Masse vom Gewicht Q eine Geschwindigkeit v in dem Augenblick besitzt, in welchem dieselbe nach der entgegengesetzten Richtung von einer unveränderlichen Ueberwucht P ergriffen wird, so ist nach Verlauf von t Secunden die noch statt findende Geschwindigkeit, oder

$$c = v - 2g\frac{P}{Q}t$$

und der in dieser Zeit durchlaufene Weg, oder

$$h = vt - g\frac{P}{Q}t^2.$$

Beweis.

Es wird während der Zeit t, der Masse die Geschwindigkeit v — c entzogen, d. h. es wird ihr nach der Richtung der entgegenwirkenden Ueberwucht die Geschwindigkeit v — c mitgetheilt, und folglich ist, nach §. 66. I.

$$v - c = 2g\frac{P}{Q}t.$$

Hieraus entspringt aber

$$c = v - 2g\frac{P}{Q}t.$$

Es ist ferner der Weg, welchen die Masse mit der Geschwindigkeit v in der Zeit t gleichförmig

durchlaufen würde, wenn die entgegenwirkende Ueberwucht nicht thätig wäre, $= vt$. Wird nun, wenn diese Ueberwucht thätig ist, statt vt, nur der Weg h zurück gelegt, so hat die entgegenwirkende Thätigkeit, die Masse um den Weg $vt - h$ zurück gehalten, und es ist also nach §. 66. III.

$$vt - h = g \frac{P}{Q} t^2 ;$$

folglich

$$h = vt - g \frac{P}{Q} t^2 .$$

§. 92.

Zusatz.

Aus den beiden Formeln

$$\text{I.} \quad c = v - 2g \frac{P}{Q} t.$$

$$\text{II.} \quad h = vt - g \frac{P}{Q} t^2 .$$

ergeben sich durch Entwickelung noch folgende:

$$\text{III.} \quad v = c + 2g \frac{P}{Q} t.$$

$$\text{VI.} \quad t = \frac{(v - c) Q}{2gP} .$$

$$\text{V.} \quad v = \frac{hQ + gPt^2}{tQ} .$$

$$\text{VI.} \quad t = \frac{vQ \pm \sqrt{v^2 Q^2 - 4gPQh}}{2gP} .$$

$$\text{VII.} \quad h = ct + g \frac{P}{Q} t^2 .$$

$$\text{VIII.}\quad t = \frac{-cQ + \sqrt{c^2Q^2 + 4gPQh}}{2gP}.$$

$$\text{IX.}\quad h = \frac{(v^2 - c^2)Q}{4gP}.$$

$$\text{X.}\quad c = \sqrt{v^2 - 4g\frac{P}{Q}h}.$$

$$\text{XI.}\quad v = \sqrt{c^2 + 4g\frac{P}{Q}h}.$$

$$\text{XII.}\quad c = \frac{hQ - gPt^2}{Qt}.$$

Ist $P = Q$, d. h. ist von einem mit der Geschwindigkeit v lothrecht in die Höhe geworfenen Körper die Rede, so hat man folgende 12 Formeln:

$$1)\quad c = v - 2gt$$

$$2)\quad h = vt - gt^2$$

$$3)\quad v = c + 2gt$$

$$4)\quad t = \frac{v - c}{2g}$$

$$5)\quad v = \frac{h + gt^2}{t}$$

$$6)\quad t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4gh}}{2g}$$

$$7)\quad h = ct + gt^2$$

$$8)\quad t = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4gh}}{2g}$$

$$9)\quad h = \frac{v^2 - c^2}{4g}$$

$$10)\quad c = \sqrt{v^2 - 4gh}$$

$$11)\quad v = \sqrt{c^2 + 4gh}$$

$$12)\quad c = \frac{h - gt^2}{t};$$

welche Formeln sich von denen in §. 69, nur durch die Vorzeichen unterscheiden, so daß diese in jene übergehen, wenn man c mit v verwechselt.

§. 93.

Lehrsatz.

Wirkt die verzögernde Kraft bis zu dem Augenblick, wo die ursprüngliche Geschwindigkeit gänzlich vernichtet ist, so gelten in Beziehung auf die anfängliche Geschwindigkeit v, die Zeit t bis zu ihrer Vernichtung, und den während dieser Zeit t durchlaufenen Weg h die 6 Formeln §. 66.

Beweis.

Man setze in den Formeln III, VII, IX, §. 92; Null für c, so erhält man

$$\text{I.}\quad v = 2g\frac{P}{Q}t$$

$$\text{II.}\quad h = g\frac{P}{Q}t^2$$

$$\text{III.}\quad h = \frac{v^2 Q}{4gP}$$

und eben so aus IV, VIII, XI;

$$\text{IV.}\quad t = \frac{vQ}{2gP}$$

$$\text{V.}\quad t = \sqrt{\frac{hQ}{gP}}$$

$$\text{VI.}\quad v = 2\sqrt{g\frac{P}{Q}h}.$$

§. 94.

Zusatz.

Ist P = Q, d. h. ist von der gleichförmig verzögerten Bewegung eines mit der anfänglichen Geschwindigkeit v lothrecht in die Höhe geworfenen schweren Körpers, bis zum höchsten Punkt seines Steigens, die Rede, so erhält man aus den 6 Formeln §. 93, folgende:

1) $v = 2gt$

2) $h = gt^2$

3) $h = \frac{v^2}{4g}$

4) $t = \frac{v}{2g}$

5) $t = \sqrt{\frac{h}{g}}$

6) $v = 2\sqrt{gh}$

ganz dieselben, wie in §. 64.

Aufgaben

zur Anwendung der Lehren dieses vierten Kapitels.

§. 95.

Aufgabe.

Mit der Geschwindigkeit v = 400 Fuß wird ein schwerer Körper lothrecht in die Höhe geworfen. Man soll bestimmen:

1) wie lange er überhaupt steigt?

2) wie hoch er im Ganzen steigt?

3) welche Geschwindigkeit er nach Verlauf von 4 Secunden noch besitzt?
4) wie hoch er in 4 Secunden gestiegen ist?
5) welche Geschwindigkeit er dann noch hat, wenn er 1000 Fuß gestiegen ist?
6) nach wie viel Secunden er die Höhe von 1000 Fuß erreicht hat?

Auflösung.

Zu 1. Nach §. 94, 4; ist

$$t = \frac{400}{2.\frac{125}{8}} = 12{,}8.$$

Zu 2. Nach §. 94, 3; ist

$$h = \frac{400^2}{4.\frac{125}{8}} = 2560.$$

Zu 3. Nach §. 92, 1; ist

$$c = 400 - 2.\tfrac{125}{8}.4 = 275.$$

Zu 4. Nach §. 92, 2; ist

$$h = 400.4 - \tfrac{125}{8}.4^2 = 1350.$$

Zu 5. Nach §. 92, 10; ist

$$c = \sqrt{400^2 - 4.\tfrac{125}{8}.1000} = 312\tfrac{1}{4} \text{ beinahe}.$$

Zu 6. Nach §. 92, 6; ist

$$t = \frac{400 \pm \sqrt{400^2 - 4\,\frac{125}{8}.1000}}{2.\frac{125}{8}}$$

$$= 2{,}808; \text{ so wie auch } = 22{,}792.$$

Das erste Resultat giebt an, nach wie viel Secunden er zum erstenmal; das zweite nach wie viel Secunden er zum zweitenmal (d. h. beim Niederfallen) eine Stelle trift, die 1000 Fuß über dem Auswurfspunkt liegt.

§. 96.

Aufgabe.

Einem auf einer horizontalen Ebene liegenden Körper vom Gewicht Q, wird nach horizontaler Richtung eine Geschwindigkeit $v = 80$ Fuß mitgetheilt. Der Reibungs-Coefficient der gleitenden Reibung dieses Körpers auf der horizontalen Ebene sei unveränderlich bei jeder Geschwindigkeit $= \frac{1}{4}$. Man soll bestimmen:

1) nach wie viel Secunden die anfängliche Geschwindigkeit vernichtet ist, also der Körper in den Stand der Ruhe übergeht;

2) welchen Weg er bis zum Stillstand zurück legt?

3) welche Geschwindigkeit er nach Verlauf von 8 Secunden noch besitzt?

4) wie weit er in 8 Secunden gekommen ist?

5) welche Geschwindigkeit er dann noch besitzt, nachdem er 240 Fuß zurück gelegt hat?

6) in wie viel Secunden er die 240 Fuß durchläuft.

Auflösung.

Die Ueberwucht P der verzögernden Kraft ist hier $= \mu Q = \frac{1}{4} Q$; folglich, da das Gewicht der bewegten Masse $= Q$ ist; die verzögernde Kraft selbst, oder $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$. Demnach

zu 1. Nach §. 93. IV, ist

$$t = \frac{80 \cdot 4}{2 \cdot \frac{125}{8}} = 10{,}24.$$

Zu 2. Nach §. 93. III, ist

$$= h \frac{80^2 . 4}{4 . \frac{125}{8}} = 409,6.$$

Zu 3. Nach §. 92. I, ist

$$c = 80 - 2 . \tfrac{125}{8} . \tfrac{1}{4} . 8 = 17,5.$$

Zu 4. Nach §. 92. II, ist

$$h = 80 . 8 - \tfrac{125}{8} . \tfrac{1}{4} . 8 . 8 = 390.$$

Zu 5. Nach §. 92. X, ist

$$c = \sqrt{80^2 - 4 . \tfrac{125}{8} . \tfrac{1}{4} . 240} = 51,478.$$

Zu 6. Nach §. 92. VI, ist

$$t = \frac{80 . 4 - \sqrt{80^2 . 4^2 - 4 . \frac{125}{8} . 4 . 240}}{2 . \frac{125}{8}} = 3,65;$$

indem hier das Additionszeichen nicht gelten kann, weil die Reibung keine selbstthätige Kraft ist, sondern aufhört, so wie der Körper ruht, so daß also kein Zurücklaufen desselben erfolgt.

§. 97.

Aufgabe.

Einem Körper vom Gewicht Q wird zum Aufsteigen auf einer schiefen Ebene welche 30 Grad gegen den Horizont geneigt ist, nach der Richtung derselben eine Geschwindigkeit v mitgetheilt. Man soll bestimmen:

1) wie groß v sein muß, damit Q bis zum Stillstand oder Umkehren, 5 Secunden lang steigt?

2) wie groß v sein muß, damit Q bis zum Stillstand oder Umkehren 40 Fuß durchläuft?

3) wie groß v sein muß, damit Q in 3 Secunden 20 Fuß weit, steige?

4) wie groß v sein muß, damit Q nach 4 Secunden noch 12 Geschwindigkeit hat?

5) wie groß v sein muß, damit Q, wenn 30 Fuß durchlaufen sind, noch 10 Fuß Geschwindigkeit hat?

Auflösung.

Die Ueberwucht P der verzögernden Kraft ist hier, $\mu = 0{,}231$ angenommen, gleich

$Q \operatorname{Sin} 30° + \mu Q \operatorname{Cos} 30°$ = sehr nahe 0,7. Q;

folglich die verzögernde Kraft $\frac{P}{Q}$ selbst $= 0{,}7$; daher

zu 1) $v = 109{,}375$. §. 93. I.;
zu 2) $v = 41{,}833$. §. 93. VI.;
zu 3) $v = 39{,}479$. §. 92. V.;
zu 4) $v = 99{,}5$. §. 92. III.;
zu 5) $v = 37{,}583$. §. 92. XI.

§. 98.

Wenn ein schwerer Körper nicht lothrecht sondern unter irgend einem andern Winkel gegen den Horizont, mit irgend einer Geschwindigkeit in die Höhe geworfen wird, so wirkt die Schwerkraft auch als verzögernde Thätigkeit entgegen. In den folgenden §§., sollen die vorzüglichsten Gesetze der Lehre:

Von der Bahn geworfener Körper

vorgetragen werden.

§. 99.

Lehrsatz.

Wenn ein schwerer Körper unter irgend einem Winkel β gegen den Horizont, mit einer anfänglichen Geschwindigkeit v in die Höhe geworfen wird, so durchläuft derselbe eine gewöhnliche Parabel.

Beweis.

Es sei a der Punkt von welchem die Bewegung des Körpers ausgeht; am *(Fig. 34)* die Richtung seiner anfänglichen Bewegung; an in derselben Vertical-Ebene, eine horizontale Linie. Wirkte nun die Schwerkraft nicht, so würde eine gleichförmige Bewegung erfolgen, und der in der Zeit t zurückgelegte Weg wäre $= vt$; es sei $ab = vt$. Vermöge der Einwirkung der Schwere wird aber der Körper in t Secunden dem Mittelpunkt der Erde um den Weg gt^2 näher gebracht. Zieht man also bf normal auf an und denkt sich $bk = gt^2$, so ist k der Punkt, in welchem sich der Körper nach t Secunden befindet. Setzt man nun jede Absciſſe wie $ab = u$; die zugehörige verticale Ordinate, wie $bk = z$, so hat man

$$u = vt \text{ und } z = gt^2;$$ daher

wenn man t eliminirt,

$$z = \frac{g}{v^2} \cdot u^2.$$

Nach pag. 124 meiner Analysis in dem dortigen Beispiel ist aber, wenn man für eine gewöhnliche Parabel die Absciſſen u auf einer Tangente von ihren Berührungspunkt aus, und die zugehörigen Ordinaten z parallel mit der Achse nimmt,

$$z = \frac{e}{h^2 + 4e^2} \cdot u^2$$

wo $h^2 = pe$ und $h \operatorname{Cotg} \delta = 2e$ ist.

Setzt man die Werthe für e und h in die Gleichung für z, so entsteht

$$z = \frac{\operatorname{Sin} \delta^2}{p} \cdot u^2;$$

oder, wenn β den Neigungs-Winkel der Abcissen-linie gegen h bezeichnet

$$z = \frac{\operatorname{Cos} \beta^2}{p} \cdot u^2.$$

Es ist also die Gleichung welche die Bahn eines geworfenen Körpers bestimmt, nemlich

$$z = \frac{g}{v^2} \cdot u^2,$$

vollkommen übereinstimmend, mit der Gleichung,

$$z = \frac{\operatorname{Cos} \beta^2}{p} \cdot u^2$$

welche der gewöhnlichen Parabel angehört, und es beschreibt daher jeder geworfene Körper eine Parabel, deren Parameter sich aus der Gleichung

$$\frac{g}{v^2} = \frac{\operatorname{Cos} \beta^2}{p}$$

bestimmt, nemlich

$$p = \frac{v^2 \operatorname{Cos} \beta^2}{g}.$$

§. 100.

Aufgabe.

In Beziehung auf einen unter dem Winkel β gegen den Horizont, mit der anfänglichen Geschwindigkeit v in die Höhe geworfenen Körper, eine all-

gemeine Gleichung zwischen der horizontalen Weite $af = x$ und der zugehörigen lothrechten Höhe $fk = y$ (*Fig.* 34.) herzuleiten.

Auflösung.

Es ist

$$x = ab \operatorname{Cos} \beta = vt \operatorname{Cos} \beta;$$

$$y = ab \operatorname{Sin} \beta - bk = vt \operatorname{Sin} \beta - gt^2;$$

und hieraus, wenn man t eliminirt

$$y = x \operatorname{tang} \beta - \frac{g}{v^2 \operatorname{Cos} \beta^2} \cdot x^2.$$

§. 101.

Aufgabe.

Die größte Höhe h welche ein unter dem Winkel β mit der anfänglichen Geschwindigkeit v geworfener Körper erreicht, so wie die Wurfweite w, d. h. die Entfernung von dem Punkt des Auswerfens bis zu dem, wo der geworfene Körper, die durch denselben gelegte Horizontale wieder schneidet, zu bestimmen.

Auflösung.

Um h zu bestimmen, suche man denjenigen Werth von x für welchen

$$y = \varphi x = x \operatorname{tang} \beta - \frac{g}{v^2 \operatorname{Cos} \beta^2} \cdot x^2$$

ein Größtes wird; dieser ist

$$\frac{v^2}{4g} \operatorname{Sin} 2\beta, \text{ und also}$$

$$h = \varphi \frac{v^2}{4g} \operatorname{Sin} 2\beta = \frac{v^2}{4g} \operatorname{Sin} \beta^2.$$

Die Wurfweite w ist also

$$= 2 . \frac{v^2}{4g} \mathrm{Sin}\, 2\beta; \text{ oder}$$

$$w = \frac{v^2}{2g} \mathrm{Sin}\, 2\beta.$$

§. 102.

Zusatz.

Da $\mathrm{Sin}\, 2\beta = \mathrm{Sin}\, 2\,(90 - \beta)$ ist, so ist also die Wurfweite bei zwei Winkeln die sich zu 90° ergänzen, von derselben Größe.

Die größte Wurfweite findet für $\beta = 45°$ statt, und ist

$$= \frac{v^2}{2g};$$

die zugehörige Höhe aber

$$= \tfrac{1}{2} . \frac{v^2}{4g};$$

und also ist jene 4mal so groß wie diese, und doppelt so groß als die zu v gehörige lothrechte Höhe.

§. 103.

Aufgabe.

Die Zeit T zu bestimmen, in welcher der geworfene Körper seine größte Höhe erreicht.

Auflösung.

Man setze in die Gleichung

$$x = vt\, \mathrm{Cos}\, \beta; \text{ §. 100},$$

für x die halbe Wurfweite

$$\frac{v^2}{4g} \mathrm{Sin}\, 2\beta, \text{ so entsteht}$$

$\frac{v^2}{4g}\operatorname{Sin} 2\beta = vT\operatorname{Cos}\beta$; und hieraus

$$T = \frac{v\operatorname{Sin}\beta}{2g}.$$

Die Zeit, nach Verlauf welcher der Körper den Horizont wieder schneidet, ist also

$$= \frac{v\operatorname{Sin}\beta}{g}.$$

§. 104.

Zusatz.

Ist $\beta = 0$, d. h. wird der Körper horizontal geworfen, so erhält man aus der Entgleichung, §. 100,

$$y = -\frac{g}{v^2}.x^2;$$

oder, wenn man unter y die Ordinaten unterhalb der Horizontallinie versteht,

$$y = \frac{g}{v^2}.x^2.$$

Fünftes Kapitel.

Von der ungleichförmig verzögerten Bewegung.

---

§. 105.

Aufgabe.

Die 6 Formeln für die ungleichförmig verzögerte Bewegung herzuleiten.

Auflösung.

Es bezeichnen, wie bisher, v die anfängliche Geschwindigkeit; c die nach t Secunden noch statt findende; und h den Weg.

Versteht man nun unter ft die Größe der entgegenwirkenden beschleunigenden Kraft im letzten Augenblick der Zeit t, so ergiebt sich, ganz wie in §. 81. nach den Formeln I und II in §. 92.

$$\text{I.}\quad c = Ft = -2g\int ft.\,dt$$

$$\text{II.}\quad h = \varphi t = \int c = -2g\int(\int ft.\,dt)\,dt.$$

Versteht man unter fh die Größe der entgegenwirkenden beschleunigenden Kraft in dem Augenblick, in welchen der Weg h durchlaufen ist, so erhält man ganz so wie in §. 82, aus den Formeln X und VI. §. 92.

$$\text{III.}\quad c = Fh = \sqrt{-4g\int fh.\,dh}$$

$$\text{IV.}\quad t = \varphi h = +\int\frac{1}{c} = +\int\frac{dh}{\sqrt{-4g\int fh.dh}}.$$

Versteht man aber, unter fc die Größe der verzögernden Kraft in dem Augenblick in welchen die Geschwindigkeit c statt findet, so findet man, eben so wie in §. 83, aus den Formeln IV und IX in §. 92.

$$\text{V.}\quad t = Fc = -\frac{1}{2g}\int\frac{dc}{fc}$$

$$\text{VI.}\quad h = \varphi c = -\frac{1}{2g}.\int\frac{cdc}{fc}.$$

§. 106.

Zusatz.

Aus V und VI erhält man die Zeit des ganzen Steigens $= F$; und die ganze zu erreichende Höhe $= \varphi$.

Aufgaben

zu Anwendung dieser Formeln.

§. 107.

Aufgabe.

Von der Oberfläche unserer Erde aus, wird ein schwerer Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit v lothrecht in die Höhe geworfen. Man soll mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Anziehungskraft unserer Erde die Geschwindigkeit c bestimmen, welche derselbe dann noch besitzt, wenn er zur Höhe h gestiegen ist, so wie die Zeit t in welcher er diese Höhe h erreicht.

Auflösung.

Bezeichnet r den mittleren Halbmesser unserer Erde, so ist die beschleunigende Kraft in der Höhe h; oder

$$fh = \frac{r^2}{(r+h)^2} \text{ (wie §. 89);}$$

also nach III.

$$c = Fh = \sqrt{-4g\int \frac{r^2}{(r+h)^2} dh}$$

$$= \sqrt{-4gr^2 \cdot \frac{(r+h)^{-1}}{-1}} = \sqrt{4g \cdot \frac{r^2}{r+h} + C}.$$

Für $h = 0$; ist $c = v$; also

$$v = \sqrt{4gr + C}; \text{ daher}$$
$$C = v^2 - 4gr; \text{ folglich}$$

$$c = \sqrt{v^2 - 4gr + 4gr\frac{r}{r+h}}; \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad c = \sqrt{v^2 - 4gh \cdot \frac{r}{r+h}}.$$

Ferner ist, nach IV.

$$t = \varphi h = \int \frac{1}{c} = \int \frac{dh}{\sqrt{v^2 - 4gh\frac{r}{r+h}}}$$

oder $v^2 - 4gh\frac{r}{r+h} = x^2$; also

$$h = fx = r \cdot \frac{v^2 - x^2}{4gr - v^2 + x^2} \text{ gesetzt,}$$

wenn man $4gr > v^2$ annimmt, und $4gr - v^2$ durch a^2 bezeichnet,

$$t = \int \frac{1}{x} \cdot r \cdot d\frac{v^2 - x^2}{a^2 + x^2}$$

$$= -2r\int \frac{a^2 + v^2}{(a^2 + x^2)^2} dx$$

$$= -8gr^2 \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Es ergiebt sich aber leicht

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \int \left[\frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2} \cdot dx + \frac{a^2 + x^2}{(a^2 + x^2)^2} \cdot dx\right]$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \left[\int \frac{a^2 + x^2 - 2x^2}{(a^2 + x^2)^2} \cdot dx + \int \frac{dx}{a^2 + x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{a}\,\text{Arc tang}\,\frac{x}{a}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{a^2+x^2} + \text{Arc tang}\,\frac{x}{a}\right) + C;\ \text{alſo}$$

$$t = -\frac{4gr^2}{a^3}\left(\frac{ax}{a^2+x^2} + \text{Arc tang}\,\frac{x}{a}\right) + C.$$

Für $h = 0$; iſt auch $t = 0$; $x = v$; alſo

$$C = \frac{4gr^2}{a^3}\left(\frac{av}{a^2+v^2} + \text{Arc tang}\,\frac{v}{a}\right);$$

folglich

$$t = \frac{4gr^2}{a^3}\left(\frac{av}{a^2+v^2} - \frac{ax}{a^2+x^2} + \text{Arc tg}\,\frac{v}{a} - \text{Arc tg}\,\frac{x}{a}\right)$$

Es iſt aber

$$\text{Arc tg}\,\frac{v}{a} - \text{Arc tg}\,\frac{x}{a} = \text{Arc tg}\,\frac{\frac{v}{a} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{v}{a}\cdot\frac{x}{a}}$$

$$= \text{Arc. tang}\,\frac{a(v-x)}{a^2+vx}$$

$$a^2 + v^2 = 4gr;$$

$$a^2 + x^2 = 4gr - 4gh\,\frac{r}{r+h} = 4g\,\frac{r^2}{r+h}.$$

alſo

$$t = \frac{4gr^2}{a^3}\cdot\left[\frac{av}{4gr^2} - \frac{ax(r+h)}{4gr^2} + \text{Arc tg}\,\frac{a(v-x)}{a^2+vx}\right]$$

oder

$$t = \frac{vr - x(r+h)}{a^2} + \frac{4gr^2}{a^3}\,\text{Arc tg}\,\frac{a(v-x)}{a^2+vx}$$

oder auch, weil $x = c$ iſt

$$\text{II.}\quad t = \frac{vr - c(r+h)}{a^2} + \frac{4gr^2}{a^3}\,\text{Arc tg}\,\frac{a(v-c)}{a^2+vc}$$

$$= \frac{vr - c(r+h)}{4gr - v^2} + \frac{4gr^2}{a^3}\,\text{Arc tang}\,\frac{a(v-c)}{a^2+vc}.$$

§. 108.

§. 108.

Zusatz.

Denkt man sich v nicht groß, so kann man r für $r+h$; $4gr$ für $4gr-v^2$; $4gr$ für a^2+vc d. h. für $4gr-v^2+vc$ und also auch, weil $\frac{a(v-c)}{a^2+vc}$ dann mit $\frac{v-c}{a}=\frac{v-c}{\sqrt{4gr}}$ einerlei und sehr klein ist, $\frac{v-c}{\sqrt{4gr}}$ für $\text{Arc tang}\frac{v-c}{\sqrt{4gr}}$ setzen, und es entsteht aus I,

$$c=\sqrt{v^2-4gh}; \text{ aus II aber}$$

$$t=\frac{(v-c)r}{4gr}+\frac{4gr^2(v-c)}{(4gr)^2}$$

$$=\frac{v-c}{4g}+\frac{v-c}{4g}$$

$$=\frac{v-c}{2g}=\frac{v-\sqrt{v^2-4gh}}{2g}$$

wie §. 92, 10 und 6.

§. 109.

Zusatz.

Ist $4gr<v^2$ und setzt man $v^2-4gr=b^2$; so entsteht

$$h=fx=r.\frac{v^2-x^2}{x^2-b^2}; \text{ also}$$

$$t=\int\frac{1}{x}.r.d\frac{v^2-x^2}{x^2-b^2}=-2r(v^2-b^2)\int\frac{dx}{(x^2-b^2)^2}$$

$$=-8gr^2\int\frac{dx}{(x^2-b^2)^2}.$$

Es ist aber

$$\int\frac{dx}{(x^2-b^2)^2}=\frac{1}{2b^2}\cdot\int\left[\frac{x^2+b^2}{(x^2-b^2)^2}-\frac{x^2-b^2}{(x^2-b^2)^2}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{2b^2}\cdot\int\left[\frac{x^2-b^2-2x^2}{(x^2-b^2)^2}+\frac{1}{x^2-b^2}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{2b^2}\cdot\left[\frac{x}{x^2-b^2}+\int\frac{dx}{(x+b)(x-b)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2b^2}\cdot\left(\frac{x}{x^2-b^2}-\frac{1}{2b}\int\frac{dx}{x+b}+\frac{1}{2b}\int\frac{dx}{x-b}\right)$$

$$=-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{x}{x^2-b^2}-\frac{1}{2b}\ln\frac{x+b}{x-b}\right)$$

$$=-\frac{1}{4b^3}\cdot\left(\frac{2bx}{x^2-b^2}-\ln\frac{x+b}{x-b}\right);$$ daher

$$t=\frac{2gr^2}{b^3}\left(\frac{2bx}{x^2-b^2}-\ln\frac{x+b}{x-b}\right)+\text{Const.}$$

Für $h=0$; ist auch $t=0$; und $x=v$; also

$$\text{Const}=-\frac{2gr^2}{b^3}\left(\frac{2bv}{v^2-b^2}-\ln\frac{v+b}{v-b}\right);$$

folglich

$$t=\frac{2gr^2}{b^3}\left[\frac{2bx}{x^2-b^2}-\frac{2bv}{v^2-b^2}+\ln\frac{(v+b)(x-b)}{(v-b)(x+b)}\right]$$

Es ist aber $x^2-b^2=\frac{4gr^2}{r+h}$

$$v^2-b^2=4gr;$$ also

$$\frac{2bx}{x^2-b^2}-\frac{2bv}{v^2-b^2}=2b.\left[\frac{x(r+h)}{4gr^2}-\frac{v}{4gr}\right]$$

$$=2b.\frac{x(r+h)-vr}{4gr^2};$$ folglich

$$t = \frac{2gr^2}{b^2} \cdot \left[b \frac{x(r+h) - vr}{2gr^3} + \ln \frac{(v+b)(x-b)}{(v-b)(x+b)} \right]$$

$$= \frac{x(r+h) - vr}{b^2} + \frac{2gr^2}{b^3} \ln \frac{(v+b)(x-b)}{(v-b)(x+b)}$$

oder auch

$$t = -\frac{vr - c(r+h)}{v^2 - 4gr} + \frac{2gr^2}{b^3} \cdot \ln \frac{(v+b)(c-b)}{(v-b)(c+b)} .$$

Ist endlich $v^2 = 4gr$, so entsteht

$$h = r \frac{v^2 - x^2}{x^2}; \text{ also}$$

$$t = -2rv^2 \int \frac{1}{x^4} = \tfrac{2}{3} rv^2 \cdot \frac{1}{x^3} + C.$$

Aber Const $= -\tfrac{2}{3} rv^2 \cdot \frac{1}{v^3}$; daher

$$t = \tfrac{2}{3} rv^2 \cdot \frac{v^3 - x^3}{v^3 x^3}$$

$$= \tfrac{2}{3} r \cdot \frac{v^3 - x^3}{v x^3}$$

$$= \tfrac{2}{3} r \cdot \frac{v^3 - c^3}{v c^3} .$$

Beispiel.

1) Es sei $v = 10000$;

$h = 1000000$; $r = 860$ Meilen
$= 860 \cdot 24000$; so erhält man nach §. 106

$$c = 6355.$$

$$t = 122\tfrac{3}{4}.$$

Ohne Rücksicht auf die abnehmende Schwerkraft ist

$$c = \sqrt{v^2 - 4gh} = 6123{,}7$$

$$t = \frac{v - c}{2g} = 124{,}16.$$

2) Es sei $v = 40000$; $h = 1000000$; also $v^2 > 4gr$; so erhält man

$$c = 39247{,}7 \text{ nach §. 106; und}$$
$$t = 24{,}9 \text{ nach §. 108.}$$

Ohne Rücksicht auf die veränderliche Schwerkraft ist

$$c = 39210{,}9;$$
$$t = 25\tfrac{1}{4}.$$

3) Es sei $v^2 = 4gr = 1290000000$ also
$$v = 35916{,}5; \; h = 1000000;$$
so findet man
$$c = 35077$$
$$t = \frac{3440.\,(541^{\frac{3}{2}} - 516^{\frac{3}{2}})}{129.\,\sqrt{1290.\,516}} = 26{,}177..$$

Ohne Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Schwerkraft ist

$$c = 35035;$$
$$t = 26{,}8696\ldots.$$

Anmerk. Der hier nicht berücksichtigte Widerstand der Luft, hat großen Einfluß und liefert ganz andere Resultate.

§. 110.

Zusatz.

Ist $v^2 < 4gr$, so ergiebt sich die ganze Höhe, welche erreicht wird, aus

$$c = \sqrt{v^2 - 4gh\frac{r}{r+h}} \quad \text{(§. 107. I.)}$$

wenn man $c = 0$ setzt, nemlich

$$h = \frac{rv^2}{4gr - v^2};$$

und die zugehörige Zeit aus II, nemlich

$$t = \frac{r}{4gr - v^2}\left(v + \frac{4gr}{\sqrt{4gr - v^2}} \text{Arc tg} \frac{v}{\sqrt{4gr - v^2}}\right)$$

oder, durch h ausgedrückt

$$t = \frac{(r+h)\sqrt{r+h}}{2r\sqrt{g}}\left(\frac{\sqrt{hr}}{e} + \text{Arc tg}\sqrt{\frac{h}{r}}\right)$$

wie §. 89.

Für $v = 10000$ erhält man die ganze Höhe

$= 1734453{,}7$

und die zugehörige Zeit

$= 356{,}48.$

Ist $v^2 >$ oder $= 4gr$, so wird c nie $= 0$; die ganze Steigungszeit $= \infty$, d. h. der Körper kommt nicht wieder zur Erde zurück.

§. 111.

Aufgabe.

Einem Körper vom Gewicht W, der auf einer horizontalen Ebene liegt, wird nach horizontaler Richtung eine anfängliche Geschwindigkeit v mitgetheilt, der Reibungs-Coefficient für den Stand der Ruhe sei $= \mu$; für irgend eine stattfindende Geschwindigkeit c sei er $= \frac{n}{n+c} \cdot \mu$ (wie §. 88); man soll die Zeit t bestimmen, nach Verlauf welcher der Körper, noch die Geschwindigkeit c besitzt; so wie auch den in dieser Zeit zurückgelegten Weg h.

Auflösung.

Nach §. 106. V. ist

$$t = -\frac{1}{2g} \cdot \int \frac{dc}{\frac{n}{n+c} \cdot \mu}$$

$$= -\frac{(2n+c)c}{4g\mu n} + C.$$

Für $t = 0$; ist $c = v$; also

$$\text{Const.} = \frac{(2n+v)v}{4g\mu n}; \text{ daher vollständig}$$

$$t = \frac{(v-c)(2n+v+c)}{4g\mu n}$$

und hieraus, die ganze Zeit der Bewegung

$$= \frac{(2n+v)v}{4g\mu n}.$$

Ferner ist, nach VI,

$$h = -\frac{1}{2g\mu n}\int(nc+c^2) = -\frac{c^2(3n+2c)}{12g\mu n} + C$$

$$= \frac{(v-c)[(3n+v+c)(v+c) - vc]}{12g\mu n}$$

und der ganze Weg,

$$= \frac{(3n+v)v^2}{12g\mu n}.$$

§. 112.

Aufgabe.

In einer Curve, welche in einer verticalen Ebene liegt, bewegt sich ein Körper vom Gewicht Q steigend von a nach b *Fig.* 35; die Geschwindigkeit welche er in a schon besitzt, sei $= v$; man soll die Geschwindigkeit c bestimmen, welche derselbe in b noch besitzen wird, so wie die Zeit t in welcher er den Bogen ab durchläuft.

Auflösung.

In der verticalen Ebene in welcher ab liegt, sei a der Anfangspunkt der Abscissen, x die zu ab $= \varphi x$ gehörige verticale Abscisse; $y = fx$ die zugehörige horizontale Ordinate. Man denke sich in b eine Tangente der Curve, und bezeichne den Winkel, welchen ihre Richtung mit der Abscissenlinie bildet, durch α; so ist

$$\text{tang}\, \alpha = dy = f'x \text{ und}$$

$$Q \cos \alpha = Q . \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang} x^2}} = Q . \frac{1}{\sqrt{1 + (f'x)^2}}$$

die Größe des abgleitenden Bestrebens in b, folglich, wenn die Reibung unberücksichtigt bleibt

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f'x)^2}}$$

die entgegenwirkende beschleunigende Kraft in b; daher nach §. 105. III.

$$c = \sqrt{-4g \int \frac{1}{\sqrt{1 + (f'x)^2}} . \varphi' x}$$

Es ist aber $\varphi' x = \sqrt{1 + (f'x)^2}$; also

$$c = \sqrt{-4g \int 1} = \sqrt{-4gx + C}.$$

Für $x = 0$ ist $c = v$; also

$$C = v^2 \text{; demnach}$$

$$c = \sqrt{v^2 - 4gx};$$

d. h. die Geschwindigkeit in b ist für jede Curve gerade eben so groß als die in n sein würde, wenn der Körper aus a mit der Geschwindigkeit v lothrecht in die

Höhe geworfen würde, und bis n stiege, siehe §. 92. Nr. 10.;

oder:

fällt ein Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit v von b bis a, so hat er in a gerade dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er mit derselben anfänglichen Geschwindigkeit v, die lothrechte Höhe na durchlaufen hätte; nemlich die

$$c = \sqrt{v^2 + 4gx.}$$

Zu Bestimmung der Zeit t hat man nach IV.

$$t = \int \frac{\varphi' x}{\sqrt{v^2 - 4gx}} = \int \sqrt{\frac{1 + (f' x)^2}{v^2 - 4gx}}$$

welches Integral nicht allgemein, sondern nur für bestimmte Curven anzugeben ist.

Ist z. B. ab eine Cycloide, a ihr Scheitelpunkt, so hat man (nach §. 162. Analys.)

$$f' x = \sqrt{\frac{2r - x}{x}}; \text{ folglich}$$

$$t = \int \sqrt{\frac{2x}{x(v^2 - 4gx)}}; \text{ oder}$$

$$x = \frac{v^2 \operatorname{Sin} \beta^2}{4g} \text{ gesetzt,}$$

$$t = \int \sqrt{\frac{2r}{\frac{v^2 \operatorname{Sin} \beta^2}{4g} . v^2 \operatorname{Cos} \beta^2}} . \frac{v^2}{4g} . 2 \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \beta . d\beta$$

$$= \sqrt{\frac{2r}{g}} . \int d\beta = \sqrt{\frac{2r}{g}} . \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{2\sqrt{gx}}{v} + C$$

$$= \sqrt{\frac{2r}{g}} \cdot \text{Arc Sin} \frac{2\sqrt{gx}}{v}.$$

Soll die Zeit T, während welcher die anfängliche Geschwindigkeit v gänzlich vernichtet wird, bestimmt werden, so setze man $c = 0$; dann ist $v^2 = 4gx$; also

$$T = \sqrt{\frac{2r}{g}} \cdot \text{Arc Sin } 1$$

$$= \sqrt{\frac{2r}{g}} \cdot \frac{\pi}{2}; \text{ oder}$$

$$T = \frac{\pi \sqrt{r}}{\sqrt{2g}}.$$

Es ist also T ganz unabhängig von der Größe des Bogens, d. h. jeder cycloidische Bogen vom Scheitelpunkt a an, gemessen, wird in derselben Zeit durchstiegen oder durchfallen, der Bogen mag so groß oder klein sein, wie er will.

Wegen dieser Eigenschaft heißt die Cycloide eine tautochronische Curve.

Soll die Bewegung mit der anfänglichen Geschwindigkeit v von a bis zum Stillstand in b, oder ohne anfängliche Geschwindigkeit von b bis a, gerade eine Secunde dauren, so setze man $T = 1$; dann ergiebt sich, b mag nahe oder fern von a liegen,

$$r = \frac{2g}{\pi^2}.$$

Für $T = \frac{1}{2}$ erhält man

$$r = \frac{g}{2\pi^2}.$$

Sechstes Kapitel.

Vom Stoß.

§. 113.

Erklärung.

Trift ein bewegter Körper einen andern in Ruhe oder in Bewegung befindlichen Körper dergestalt, daß die Richtungen in welchen sich die Schwerpunkte beider befinden, in einer geraden Linie liegen, und zugleich die aneinander stoßenden Flächen auf dieser Linie normal sind, so sagt man: der Stoß ist gerade oder central; außerdem heißt er schief oder excentrisch.

Die stoßenden Körper sind entweder: hart, wenn sich ihre Gestalt durch die Einwirkung nicht ändert; weich, wenn sie eine andere Gestalt annehmen und beibehalten; elastisch, wenn sich die Gestalt ändert, aber ganz oder zum Theil wieder herstellt.

§. 114.

Lehrsatz.

Das Produkt aus dem Gewicht Q einer bewegten Masse M in die Geschwindigkeit C, womit sie einen ruhenden Körper central trift, bestimmt die Größe des Stoßes E in Beziehung auf denjenigen Centralstoß e als Einheit, welchen eine Masse deren Gewicht = 1 und deren Geschwindigkeit = 1 ist, auf einen ruhenden Körper äußert.

Beweis.

Die Größe des Stoßes wächst mit der Menge materieller Theile des stoßenden Körpers, und zugleich auch mit der Geschwindigkeit mit welcher er den ruhenden Körper trift. Man hat also, wenn M′; C′; Q′; E′ sich eben so auf einander beziehen, wie M, C, Q, E;

$$E : E' = MC : M'C'.$$

Es ist aber

$$Q : Q' = M : M'; \text{ also}$$
$$E : E' = QC : Q'C'.$$

Ist nun $Q' = 1$; $C' = 1$; also $E' = e =$ der Einheit des Stoßes, so erhält man

$$E = QC$$

solche Einheiten.

§. 115.

Erklärung.

Das Produkt QC oder auch das MC als Maaß für die Größe des Stoßes, oder der Kraft, die Bewegung fortsetzen zu wollen, wird das Bewegungsvermögen des Körper genannt.

§. 116.

Lehrsatz.

Trift ein harter Körper, dessen Gewicht = Q und dessen Geschwindigkeit = c ist, einen andern harten vom Gewicht R und der Geschwindigkeit v central, so ist die Geschwindigkeit x mit welcher

beide Körper vereint nach dem Stoße sich fortbewegen

$$= \frac{Qc + Rv}{Q + R}.$$

Beweis.

Die Summe der Bewegungsvermögen vor dem Stoß ist $= Qc + Rv$ und nach dem Stoß ist das Bewegungsvermögen der vereinten Masse $= (Q+R)x$. Da nun durch den Stoß wohl Geschwindigkeit, aber nicht Bewegungsvermögen verloren geht, so ist also

$$(Q + R)x = Qc + Rv;$$

und hieraus

$$x = \frac{Qc + Rv}{Q + R}.$$

§. 117.

Zusatz.

Der Verlust des Bewegungsvermögens von Q ist

$$= Q(c - x)$$
$$= \frac{(c - v) QR}{Q + R}$$

der, der Geschwindigkeit $= c - x$

$$= \frac{(c - v) R}{Q + R}.$$

Der Zuwuchs an Bewegungsvermögen von R ist

$$= (x - v) R$$
$$= \frac{(c - v) QR}{Q + R};$$

und der, der Geschwindigkeit $= x - v$

$$= \frac{(c-v)\,Q}{Q+R}.$$

Ist v negativ, d. h. bewegt sich R dem Q entgegengesetzt, so ist

$$x = \frac{Qc - Rv}{Q+R};$$

der Verlust des Bewegungsvermögens für Q

$$= \frac{(c+v)\,QR}{Q+R};$$

der, der Geschwindigkeit

$$= \frac{(c+v)\,R}{Q+R};$$

der Zuwachs an Bewegungsvermögen von R ist

$$= \frac{(c+v)\,QR}{Q+R}$$

und der, der Geschwindigkeit

$$= \frac{(c+v)\,Q}{Q+R}.$$

Ist $v = 0$; d. h. steht der Körper, dessen Gewicht R ist, vor dem Stoße still, so hat man dieselben Größen, der Reihe nach

$$\frac{Qc}{Q+R};\ \frac{cQR}{Q+R};\ \frac{cR}{Q+R};$$

$$\frac{cQR}{Q+R};\ \frac{cQ}{Q+R}.$$

§. 118.

Lehrsatz.

Trift ein vollkommen elastischer Körper, dessen Gewicht $= Q$ und dessen Geschwindigkeit $= c$ ist, einen andern vollkommen elastischen dessen Gewicht

= R, und dessen Geschwindigkeit = v ist, central, so behält der erstern die Geschwindigkeit

$$z = \frac{c(Q-R)+2vR}{Q+R};$$

und der letztere setzt seine Bewegung mit der Geschwindigkeit

$$y = \frac{v(R-Q)+2cQ}{Q+R} \text{ fort.}$$

Beweis.

In dem Augenblick in welchen die Einwirkung des ersten Körpers auf den zweiten aufhört, haben beide nach §. 116 die Geschwindigkeit

$$x = \frac{Qc+Rv}{Q+R}$$

angenommen, und also hat Q an Geschwindigkeit verloren, die Größe c — x; R gewonnen, x — v. Durch die Wiederherstellung der Gestalt von jeden Körper mit eben der Gewalt mit der sie verändert wurde, verliert Q noch einmal c — x und R gewinnt noch einmal x — v. Es hat also nach gänzlich wiederhergestellter Gestalt, Q die Geschwindigkeit c—2(c—x), und R die, v+2(x—v), woraus, wenn man den Werth für x substituirt, obige Formeln sich ergeben.

§. 119.

Zusatz.

Ist v negativ, so hat man

$$z = \frac{c(Q-R)-2vR}{Q+R}$$

$$y = \frac{v(Q-R)+2cQ}{Q+R}.$$

Ist $v = 0$; so entsteht

$$z = \frac{c(Q-R)}{Q+R}$$

$$y = \frac{2cQ}{Q+R}.$$

Ist $v = 0$ und $Q = R$; so wird

$$z = 0;$$

$$y = c.$$

§. 120.

Zusatz.

Für unvollkommen elastische Körper können nur dann Untersuchungen angestellt werden, wenn man den Grad ihrer Elasticität kennt.

Aufgaben

zum sechsten Kapitel.

§. 121.

Aufgabe.

Ein Rammbär, dessen Gewicht $= P$ ist, fällt von einer Höhe $= h$ herab, und trift einen eingerammten Pfahl, dessen Gewicht $= Q$ ist. Wenn nun der Pfahl auf diesen Schlag noch zur Tiefe e einsinkt, wie groß ist dann der Widerstand R des Pfahls, d. h. wie groß ist die Last R welche der Pfahl als Maximum fürs Gleichgewicht tragen kann?

Die Geschwindigkeit mit welcher der Bär den Pfahl trift sei $= c$; so ist

$$1)\quad c^2 = 4gh.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Pfahl das Eindringen beginnt, sei $= v$, so ist, beide Körper als hart angesehen

$$2)\quad Pc = (P+Q)\,v \quad §.\ 117.$$

$$3)\quad v^2 = 4Ge$$

wenn G die Beschleunigung für die aus dem Widerstand R entspringende verzögernde Kraft bezeichnet.

Da nun die Zeit während welcher der Weg e durchlaufen, also die Geschwindigkeit v vernichtet wird, ungemein klein ist, so daß während Verlauf derselben der Bär als auf dem Pfahl liegen bleibend anzusehen ist, so ist die Ueberwucht der verzögernden Kraft $= R - P - Q$; folglich die verzögernde Kraft selbst

$$= \frac{R - P - Q}{P + Q}; \text{ daher}$$

$$4)\quad G = g\,\frac{R - P - Q}{P + Q}.$$

Quadrirt man nun die Gleichung 2; setzt in die entstehende Gleichung die Werthe für c^2 und v^2 aus 1, und 3; und zugleich den für G aus 4; so erhält man

$$P^2 . 4gh = (P+Q)^2 . 4eg\,\frac{R - P - Q}{P + Q}$$

und hieraus, den mittleren Widerstand der den Pfahl umgebenden Erde, während des Eindringens

zur

zur Tiefe e, oder die Last, welche der Pfahl nun als Maximum tragen könnte, nemlich

$$R = \frac{P^2 h}{(P+Q)e} + P + Q.$$

Ist R gegeben, und soll e bestimmt werden, so ergiebt sich

$$e = \frac{P^2 h}{(P+Q)(R-P-Q)}.$$

Beispiel. Ist $P = 600$ ℔; $h = 5$ Fuß; $Q = 800$ ℔; $e = \frac{1}{350}$ Fuß; so entsteht

$$R = 451400.$$

Mit Sicherheit könnte man also als bleibende Last, den Pfahl mit $\frac{1}{10} R = 45000$ ℔ belasten.

§. 122.

Aufgabe.

Eine feste mathematische Linie sei in horizontaler Lage, und um ihren Mittelpunkt drehbar; auf dem einen Endpunkt derselben ruht eine Masse vom Gewicht W; auf den andern fällt eine Masse vom Gewicht R von der Höhe H frei herab; welche Geschwindigkeit v wird der Masse W mitgetheilt, wie hoch h erhebt sie sich, und wie lange Zeit t dauert die Erhebung?

Auflösung.

Die Geschwindigkeit womit R den Hebel trift, oder c ist $= 2\sqrt{gH}$; folglich

$$v = \frac{cR}{R+W}; \text{ daher}$$

$$h = \frac{v^2}{4g} = \frac{HR^2}{(R+W)^2} \text{ oder } = \frac{c^2}{4g} \cdot \left(\frac{R}{R+W}\right)^2$$

und

$$t = \frac{v}{2g} = \sqrt{\frac{H}{g}} \cdot \frac{R}{R+W} = \frac{c}{2g} \cdot \frac{R}{R+W}.$$

Beisp. Ist $W = 600$; $c = 250$; $R = 40$, so ergiebt sich

$$v = \frac{125}{8} = 15\tfrac{5}{8}$$
$$h = \frac{125}{32} = 3\tfrac{29}{32}$$
$$t = \tfrac{1}{2}.$$

§. 123.

Aufgabe.

Zwei oder mehrere vollkommen elastische, ruhende Massen, deren Gewichte = B, C, D u. s. w. (*Fig.* 36) sind, liegen so aneinander, daß ihre Schwerpunkte in eine gerade Linie fallen, und ihre Berührungsflächen normal auf derselben sind. Wenn nun die Masse B von einer andern elastischen Masse deren Gewicht = A ist, central mit der Geschwindigkeit v getroffen wird, welche Geschwindigkeiten a, b, c u. s. w. werden dann die Massen A, B, C u. s. w. annehmen?

Auflösung.

Nach §. 119 ist

$$a = \frac{v(A-B)}{A+B}$$

und B will eine Geschwindigkeit

$$x = \frac{2vA}{A+B} \text{ annehmen.}$$

Mit dieser wirkt B auf C und daher ist

$$b = \frac{x(B-C)}{B+C} = \frac{2vA(B-C)}{(A+B)(B+C)}$$

und C will die Geschwindigkeit

$$y = \frac{2xB}{B+C} \text{ annehmen.}$$

Mit dieser wirkt C auf D, und daher ist

$$c = \frac{y(C-D)}{C+D} = \frac{2^2.vAB(C-D)}{(A+B)(B+C)(C+D)}$$

und, wenn weiter keine Masse da ist,

$$d = \frac{2yC}{C+D} = \frac{2^3.v.A.BC}{(A+B)(B+C)(C+D)}$$

Ruhen n Massen B, C, D .... N, M; so ist die Geschwindigkeit m womit die letzte M sich fortbewegt.

$$= \frac{2^n.v.A.B.C\ldots\ldots N.}{(A+B)(B+C)\ldots\ldots(N+M)}$$

und die n der vorletzten Masse N

$$= \frac{2^{n-1}.v.A.B.C\ldots\ldots L.(N-M)}{(A+B)(B+C)\ldots\ldots(N+M)}.$$

§. 124.

Zusatz.

Ist $A = B = C =$ u. s. w. $= M$; so werden a, b, c ..... $n = 0$; und

$$m = v.$$

Ist $B = eA$; $C = eB = e^2A$; $D = eC = e^3A$ u. s. w. $N = e^{n-1}A$; $M = e^nA$; so wird

$$a = v.\frac{1-e}{1+e}$$

$$b = 2v.\frac{1-e}{(1+e)^2}$$

$$c = 2^2 . v. \frac{1 - e}{(1 + e)^3}$$

u. s. w.

$$n = 2^{n-1} . v. \frac{1 - e}{(1 + e)^n} \text{ und}$$

$$m = v. \left(\frac{2}{1 + e}\right)^n .$$

Für $e = \frac{1}{2}$ entsteht

$$a = \frac{1}{3}v;\ b = \frac{4}{9}v;\ c = \frac{16}{27}v;\ \ldots .\ n = \frac{2^{m-2}}{3^n} v$$

$$m = (\tfrac{4}{3})^n . v.$$

Siebentes Kapitel.

Von der Reduction der Massen.

---

§. 125.

Erklärung.

Wenn auf einer horizontalen geometrischen um ihre verticale Achse drehbaren Kreisscheibe, in der Entfernung a von dieser Achse, in k eine Masse vom Gewicht Q ruht, die nicht als Last drehende Bewegung hervorzubringen, oder zu verhindern strebt, sondern blos als träge Materie einen Kraft-Aufwand erfordert, um in Bewegung versetzt zu werden, und man denkt sich nun in der Entfernung r von der Drehachse tangential in der Kreisscheibe eine Ueberwucht P wirkend, so wird die Größe der

entstehenden Bewegung, nicht nur von P, r und Q sondern auch von a abhängig sein, denn denkt man sich Q weggenommen und dafür in der Entfernung b von der Drehachse in f eine träge Masse vom Gewicht W aufgelegt, b und W aber so gewählt, daß dieselbe Bewegung entsteht, wie in dem Fall, wo nicht W, sondern Q auf der Scheibe lag, so werden die Geschwindigkeiten c, v welche die Punkte k und f annehmen, sich wie a zu b verhalten müssen. Sie sind also abhängig von diesen Entfernungen, und man kann die Frage aufwerfen: welche Gleichung muß zwischen Q, c, W und v, oder zwischen Q, a, W und b stattfinden, damit dieselbe Bewegung erfolgt, mag Q in k oder mag W in f liegen?

Diese Gleichung, es mag von fortgehender oder drehender Bewegung die Rede sein, ist, wie in dem folgenden §. bewiesen werden wird

$$Q \cdot c^2 = W \cdot v^2;$$

oder auch, wenn blos von drehender Bewegung die Rede ist,

$$Q \cdot a^2 = W \cdot b^2$$

und man nennt das Produkt aus dem Gewicht einer trägen Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit; oder auch das Produkt aus diesem Gewicht in das Quadrat ihrer Entfernung von der Drehachse, das Moment der Trägheit dieser Masse. Die Einerleiheit der Gleichung

$$Qc^2 = W \cdot v^2 \text{ oder } Q : W = v^2 : c^2;$$

mit der

$$Qa^2 = Wb^2 \text{ oder } Q : W = b^2 : a^2;$$

welche letztere sich blos auf drehende Bewegung bezieht, erhellet unmittelbar aus der Bedingung

$$v : c = b : a.$$

§. 126.

Lehrsatz.

Massen, welche gleiche Momente der Trägheit haben, haben auch einerlei Einfluß auf die Größe der durch eine und dieselbe Ueberwucht, hervorgebrachten Bewegung.

Beweis.

Befindet sich in einem festen System, welches durch eine Ueberwucht P fortgehend oder drehend bewegt werden soll, in irgend einem Punkt k eine träge Masse vom Gewicht Q und liegt dieser Punkt k so, daß wenn P die Geschwindigkeit w annimmt, dann k die c annehmen muß, so ist die auf den Punkt k statisch reducirte Ueberwucht $= \frac{Pw}{c}$ und daher die beschleunigende Kraft für diesen Punkt $k = \frac{Pw}{Qc}$ folglich der Weg H dieses Punktes k in der Zeit $t = g \frac{Pw}{Qc} t^2$. Denkt man sich nun Q in a weggenommen, und dafür an einer andern Stelle des Systems; in f eine Masse vom Gewicht W angebracht und liegt f so, daß wenn P die Geschwindigkeit w annimmt, dann f die v annehmen muß, so ist die auf f statisch reducirte Ueberwucht $= \frac{Pw}{v}$, und daher die beschleunigende

Kraft in f $= \frac{Pw}{Wv}$, folglich der Weg h dieses Punktes f in der Zeit $t = g\frac{Pw}{Wv}t^2$. Soll nun der Erfolg derselbe sein, es mag Q in k oder W in f angebracht sein, so müssen sich die gleichzeitigen Wege H und h der Punkte k und f eben so verhalten, wie die Geschwindigkeiten c, v welche diese Punkte dann annehmen, wenn der Angrifspunkt der Kraft P die Geschwindigkeit w hat. Dies giebt die Bedingungs-Gleichung

$$g\frac{Pw}{Qc}t^2 : g\frac{Pw}{Wv}t^2 = c : v; \text{ oder}$$

$$\frac{v}{Qc} = \frac{c}{Wv}$$

und hieraus folgt

$$Wv^2 = Qc^2,$$

oder auch, wenn von drehender Bewegung um eine Achse die Rede ist, und a, b die Entfernungen der Punkte k, f von dieser Achse bezeichnen

$$Wb^2 = Qa^2.$$

§. 127.

Zusatz.

Durch die Momente der Trägheit lassen sich nun Massen eben so von einem Punkt eines Systems auf einen andern reduciren, wie in der Statik Kräfte mit Hülfe der statischen Momente.

Hat z. B. eine Masse vom Gewicht Q in irgend einer Zusammenstellung die Geschwindigkeit c und man will sie wegnehmen, und dafür an einen andern Punkt f des Systems, der die Geschwindig-

keit v dann annimmt, wenn jener die Geschwindigkeit c hat, eine Masse von so einer Größe anbringen, daß der Erfolg in Beziehung auf Größe der entstehenden Bewegung ganz derselbe bleibt, so muß das Gewicht der in f anzubringenden Masse

$$= \frac{Q\, c^2}{v^2}$$

sein, und es heißt $\frac{Q\, c^2}{v^2}$ die aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit v reducirte Masse Q.

§. 128.

Erklärung.

Wird eine Masse vom Gewicht Q so bewegt, daß nicht alle Punkte derselben einerlei Geschwindigkeit annehmen, so heißt derjenige Punkt derselben, welcher diejenige Geschwindigkeit c hat, für welche $Q . c^2$ gleich ist der Summe der Momente der Trägheit aller einzelnen Elemente der ganzen Masse Q, der Mittelpunkt des Schwungs, oder der Schwingungspunkt.

§. 129.

Lehrsatz.

Wenn längs einer geraden Linie von der Länge l eine Masse vom Gewicht Q gleichförmig vertheilt ist, und diese Linie l befindet sich in Beziehung auf eine Drehungsachse D in einer solchen Lage, daß die Normalen aus den beiden Endpunkten von l, auf eine durch D gelegte Ebene E = a, b; die Normalen aus den Durchschnittspunkten von a und b mit E auf D, aber = A, B sind, so ist

die Entfernung e des Schwingungspunkts der Linie l von D gleich

$$\sqrt{\frac{A^2 + B^2 + AB + a^2 + b^2 + ab}{3}}$$

Beweis.

Man stelle sich *(Fig. 37.)* das bei H und K rechtwinklichte Trapez NHKM, um HK gedreht vor, so daß die Ebene desselben auf der Ebene des bei F und G rechtwinklichten Trapezes HFGK normal steht, so kann man sich unter NM die Linie l und unter FG die Drehungsachse D vorstellen, und es ist dann NH = a; MK = b; HF = A; KG = B; setzt man nun den Winkel, welchen MN und KH bilden $= \alpha$; den welchen KH und D bilden, $= \beta$; NR = x und das Moment der Trägheit der in NR vertheilten Masse in Beziehung auf D gleich φx, fällt RP normal auf HK; PW normal auf FG, und denkt sich x um RT = k gewachsen, so ist das Gewicht der in RT = k vertheilten Masse $= \frac{k}{l} Q$; das Quadrat der Entfernung des Punktes R von $D = WP^2 + PR^2$

$$= (A + HP \operatorname{Sin} \beta)^2 + (a + NR \operatorname{Sin} \alpha)^2$$
$$= (A + x \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \beta)^2 + (a + x \operatorname{Sin} \alpha)^2;$$

und das Quadrat der Entfernung des Punktes T von D

$$= [A + (x + k) \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \beta]^2 + [a + (x + k) \operatorname{Sin} \alpha]^2;$$

folglich fällt das Quadrat der Entfernung des Mittelpunkts des Schwungs der Linie RT von der Achse D zwischen

$$(A + x \cos\alpha \sin\beta)^2 + (a + x \sin\alpha)^2$$ und
$$[A + (x+k) \cos\alpha \sin\beta]^2 + [a + (x+k) \sin\alpha]^2$$

und ist folglich, wenn k' eine zwischen o und k liegende Größe bezeichnet, durch

$$[A + (x+k') \cos\alpha \sin\beta]^2 + [a + (x+k') \sin\alpha]^2$$

auszudrücken. Da nun $\varphi(x+k) - \varphi x$ das Moment der Trägheit, der in RT vertheilten Masse in Beziehung auf D, ist, so hat man also die Gleichung

$$\varphi(x+k) - \varphi x = \frac{kQ}{l}\Big[[A + (x+k') \cos\alpha \sin\beta]^2 + [a + (x+k') \sin\alpha]^2\Big]$$

und hieraus

$$\varphi x = \frac{Q}{l} \int [(A + x \cos\alpha \sin\beta)^2 + (a + x \sin\alpha)^2]$$

$$= \frac{Q}{l}\,[(A^2 + a^2)x + (A \cos\alpha \sin\beta + a \sin\alpha)x^2 + \tfrac{1}{3}(\cos\alpha^2 \sin\beta^2 + \sin\alpha^2)x^3]$$

wo keine Const. hinzukommt.

Für $x = l$ ergiebt sich hieraus

$$\varphi l = Q\,(A^2 + a^2 + Al \cos\alpha \sin\beta + al \sin\alpha + \tfrac{1}{3}l^2 \cos\alpha^2 \sin\beta^2 + \tfrac{1}{3}l^2 \sin\alpha^2).$$

Es ist aber $l \cos\alpha \sin\beta = B - A$;
$l \sin\alpha = b - a$; folglich

$$\varphi l = Q.\,\frac{A^2 + B^2 + AB + a^2 + b^2 + ab}{3}.$$

Es ist aber auch

$$\varphi l = Q.\,e^2;$$ daher

$$e = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + AB + a^2 + b^2 + ab}{3}}.$$

§. 130.

Zusatz.

Für $a = o$ und $b = o$; wird

$$e = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + AB}{3}}.$$

Für $a = o$; $b = o$ und $A = B$; wird

$$e = A.$$

Für $a = o$; $b = o$; $A = o$; wird

$$e = \sqrt{\frac{B^2}{3}}$$

u. s. w.

Nach diesen Formeln lassen sich die Werthe für e auch construiren.

§. 131.

Aufgabe.

Ueber eine Ebene E ist eine Masse vom Gewicht Q gleichförmig vertheilt; man soll die Entfernung des Schwingungspunktes dieser Ebene von einer Drehachse D welche mit E parallel liegt, bestimmen.

Auflösung.

Man denke sich durch D eine Ebene, normal auf die in welcher E liegt; HK *(Fig. 38)* sei die Durchschnittslinie beider Ebenen; ihre Entfernung von D sei $= A$; die Ebene in welcher E liegt, sei VHKW, so gedacht, daß VHKW um HK gedreht ist, und normal auf der Ebene des Papieres steht; VH und WK seien normal auf HK; NM

sei ein Durchmesser der die Ebene E begränzenden Curve; der Winkel, welchen die zu beiden Seiten gleichen mit HV parallelen Ordinaten mit diesen Durchmesser als Abscissenlinie bilden sei $= \beta$; x bezeichne jede Abscisse, $y = fx$ die zugehörigen Ordinaten; N in HV sei der Anfangspunkt der Abscissen; das von 2y begränzte Stück der Ebene sei $= \varphi x$; das Moment der Trägheit der in φx vertheilten Masse in Beziehung auf D sei $= Fx$; die Entfernung des Schwingungspunktes der Ebene φx von D sei $= e$; $NH = a$. Wächst nun x um $RT = k$, so sind die, in T begränzenden Ordinaten $= f(x+k)$; der zwischen $2fx$ und $2f(x+k)$ liegende Streifen $\varphi(x+k) - \varphi x$ kann durch $k \operatorname{Sin}\beta . 2f(x+k')$ ausgedrückt werden, wenn k' zwischen o und k liegt, und die über $k \operatorname{Sin}\beta . 2f(x+k')$ vertheilte Masse ist

$$= \frac{2k \operatorname{Sin}\beta\, f(x+k').\, Q}{E}.$$

Wäre nun diese Masse gleichförmig in der Linie 2y vertheilt, so wäre die Entfernung ihres Schwingungspunktes von D nach §. 129 =

$$\sqrt{\frac{\left[\begin{array}{l} A^2 + A^2 + A^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta - y)^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta \\ \quad + y)^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta - y)(a + x\operatorname{Cos}\beta + y) \end{array}\right]}{3}}$$

$$= \sqrt{A^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta)^2 + \tfrac{1}{3}y^2}$$

$$= \sqrt{A^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta)^2 + \tfrac{1}{3}(fx)^2}.$$

Wäre sie aber gleichförmig in der Linie $2f(x+k)$ vertheilt, so wäre die Entfernung

$$= \sqrt{A^2 + [a + (x+k)\operatorname{Cos}\beta]^2 + \tfrac{1}{3}f(x+k)^2}$$

und es muß daher einen zwischen o und k liegenden Werth k'' geben, für welchen die Entfernung des Schwingungspunkts der Ebene $2k \operatorname{Sin}\beta f(x+k')$ von D

$$= \sqrt{A^2 + [a + (x+k'')\operatorname{Cos}\beta]^2 + \tfrac{1}{3} f(x+k'')^2} \text{ ist.}$$

Man hat folglich

$$F(x+k) - Fx = \frac{2kQ\operatorname{Sin}\beta f(x+k')}{E}[A^2 + [a + (x+k'')\operatorname{Cos}\beta]^2 + \tfrac{1}{3} f(x+k'')^2]$$

und hieraus

$$F'x = \frac{2Q \operatorname{Sin}\beta}{E} fx [A^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta)^2 + \tfrac{1}{3} fx^2]$$

folglich

$$Fx = \frac{2Q \operatorname{Sin}\beta}{E} \int fx [A^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta)^2 + \tfrac{1}{3} fx^2].$$

Nun ist aber die auf φx vertheilte Masse $= \frac{Q\varphi x}{E}$; folglich auch

$$Fx = \frac{Q\varphi x}{E} . e^2; \text{ daher}$$

$$\varphi x . e^2 = 2 \operatorname{Sin}\beta \int fx [A^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta)^2 + \tfrac{1}{3} fx^2]$$

und also

$$e = \sqrt{\frac{2 \operatorname{Sin}\beta}{\varphi x} \int fx [A^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta)^2 + \tfrac{1}{3} fx^2]}$$

oder auch, weil $\varphi x = 2 \operatorname{Sin}\beta \int fx$ ist,

$$e^2 = \frac{\int fx [A^2 + (a + x\operatorname{Cos}\beta)^2 + \tfrac{1}{3} fx^2]}{\int fx}.$$

§. 132.

Zusatz.

1) Ist E ein Dreieck; also $y = fx = nx$; so erhält man, wenn für $x = h$; $fh = nh = b$ wird,

$$e^2 = A^2 + a^2 + \tfrac{4}{3} a h \, \mathrm{Cos}\,\beta + \tfrac{1}{3} h^2 \, \mathrm{Cos}\,\beta^2 + \tfrac{1}{6} b^2.$$

Wenn nun $\beta = 90^\circ$ also das Dreieck gleichschenklicht ist, so entsteht

$$e^2 = A^2 + a^2 + \tfrac{1}{6} b^2$$

und hieraus, wenn $A = 0$ und $a = 0$, also h die Drehungsachse ist

$$e^2 = \tfrac{1}{6} b^2.$$

2) Ist E ein Parallelogramm, also für jeden Werth von x; $y = b$; so entsteht

$$e^2 = A^2 + a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 + a x \, \mathrm{Cos}\,\beta + \tfrac{1}{3} x^2 \, \mathrm{Cos}\,\beta^2$$

und also, fürs Rechteck, d. h. für $\beta = 90^\circ$;

$$e^2 = A^2 + a^2 + \tfrac{1}{3} b^2$$

und hieraus, wenn $A = 0$; $a = 0$ ist, also die Drehachse in der Mitte des Rechtecks liegt

$$e^2 = \tfrac{1}{3} b^2.$$

3) Ist $\beta = 0$; E eine Kreis-Ebene zum Halbmesser $= r$; so kann man $x = r - r \, \mathrm{Cos}\,\delta$ $y = r \, \mathrm{Sin}\,\delta$ setzen und erhält dann

$$e^2 = \frac{(A^2 + a^2) \int \mathrm{Sin}\,\delta^2 + \tfrac{1}{3} r^2 \int \mathrm{Sin}\,\delta^4}{\int \mathrm{Sin}\,\delta^2}$$

$$= A^2 + a^2 + \tfrac{1}{4} r^2 - \tfrac{1}{6} r^2 \frac{\mathrm{Sin}\,\delta^3 \, \mathrm{Cos}\,\delta}{\delta - \mathrm{Sin}\,\delta \, \mathrm{Cos}\,\delta}$$

und hieraus, für $\delta = \pi$; also für den ganzen Kreis

$$e^2 = A^2 + a^2 + \tfrac{1}{4} r^2.$$

Ist A = a = o; also der Durchmesser die Drehungsachse, so wird

$$e^2 = \frac{1}{4} r^2; \text{ also } e = \frac{1}{2} r.$$

Ist A = o; a = r, also eine Tangente die Drehungsachse, so entsteht

$$e^2 = \frac{5}{4} r^2.$$

§. 133.

Aufgabe.

Ein normales Parallelepipedum von den Abmessungen l, b, h wird um eine mit b parallele Drehachse D gedreht; man soll das Moment der Trägheit dieses Körpers, und seinen Schwingungspunkt bestimmen.

Auflösung.

Durch die rechtwinklichten Coordinaten a, e sei die Lage von D gegen b gegeben *(Fig. 39)*; x sei ein veränderliches Stück von l; φx das Moment der Trägheit des Körpers b. h. x; das Gewicht der Cubic-Einheit sei = p. Wächst nun x um k, so ist das Gewicht der Masse bhk = bhkp und $\varphi(x+k) - \varphi x$ drückt das Moment der Trägheit dieser Masse in Beziehung auf D aus. Wäre nun diese Masse in dem Rechteck bh zur Abscisse x gehörig, vereint, so wäre das Quadrat der Entfernung des Schwingungspunktes von D nach §. 132. 2;

$$= (a+x)^2 + \left(e + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

und wäre sie in dem Rechteck bh zur Abscisse

$x+k$ gehörig, vereint, so wäre das Quadrat dieser Entfernung

$$= (a+x+k)^2 + \left(e+\frac{h}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Es muß daher ein Werth k' zwischen o und k liegend existiren, für welchen

$$(a+x+k')^2 + \left(e+\frac{h}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

das Quadrat der Entfernung des Schwingungspunktes der in bhk vertheilten Masse, von D; also

$$bhkp.\left[(a+x+k')^2 + \left(e+\frac{h}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

das Moment der Trägheit dieser Masse in Beziehung auf D ausdrückt.

Man hat demnach die Gleichung

$$\varphi(x+k) - \varphi x = bhkp\,[(a+x+k')^2 + e^2 + eh + \tfrac{1}{3}h^2]$$

und hieraus

$$\varphi x = bhp\int(a+x)^2 + e^2 + eh + \tfrac{1}{3}h^2$$

$$= bhp\left[(a^2+e^2+eh+\tfrac{1}{3}h^2)x + ax^2 + \frac{x^3}{3}\right]$$

also

$$\varphi l = bhlp(a^2 + e^2 + eh + \tfrac{1}{3}h^2 + al + \tfrac{1}{3}l^2)$$

folglich das Quadrat der Entfernung des Schwingungspunktes von D, oder

$$g^2 = a^2 + e^2 + eh + \tfrac{1}{3}h^2 + al + \tfrac{1}{3}l^2.$$

§. 134.

Zusatz.

Ist $e = o$; und wird $bhlp = Q$ gesetzt, so entsteht

$\varphi l =$

$$\varphi l = Q . \left[\frac{l^2 + h^2}{3} + a(a+l) \right]$$

$$g^2 = \frac{l^2 + h^2}{3} + a(a+l).$$

Ist $e = 0$ und $a = 0$; also b selbst die Drehungsachse, so entsteht

$$\varphi l = Q \frac{l^2 + h^2}{3}$$

$$g^2 = \frac{l^2 + h^2}{3}.$$

§. 135.

Aufgabe.

Ein normaler Cylinder, dessen Halbmesser der Grund-Ebenen $= r$ und dessen Höhe $= h$ ist, wird um eine mit h parallele Achse D gedreht. Man soll das Moment der Trägheit dieses Cylinders und seinen Schwingungspunkt bestimmen.

Auflösung.

Man denke sich eine Ebene durch die Achse des Cylinders und durch D gelegt (*Fig.* 40), setze die Entfernung zwischen der Achse des Cylinders und D gleich a; die Gewichts-Einheit des Cylinders $= p$, denke sich parallel mit h und D und normal auf die erwähnte Ebene durch den Cylinder eine Ebene, so bildet diese ein Rechteck, dessen Höhe $= h$ und dessen Breite $= 2y = 2fx$ ist, unter x die zur rechtwinklichten Ordinate y gehörige Abscisse verstanden. Bezeichnet nun φx das Moment der Trägheit des zu x und 2y gehörigen

Cylinderstücks, Fx den Cubic-Inhalt des Cylinderstücks selbst, so fällt $F(x+k) - Fx$ zwischen

$$k.\ h.\ 2.\ fx \text{ und}$$
$$k.\ h.\ 2.\ f(x+k);$$

kann also durch

$$k.\ h.\ 2.\ f(x+k')$$

ausgedrückt werden, und $\varphi(x+k) - \varphi x$ fällt daher nach §. 132, 2; zwischen

$$2pkhf(x+k')[(a+x)^2 + \tfrac{1}{3}(fx)^2] \text{ und}$$
$$2pkh\,f(x+k')[(a+x+k)^2 + \tfrac{1}{3}f(x+k)^2]$$

kann also durch

$$2pkh\,f(x+k')[(a+x+k'')^2 + \tfrac{1}{3}f(x+k'')^2]$$

dargestellt werden, wenn sowohl k' als k'' Größen bedeuten, welche zwischen o und k liegen.

Man hat also

$$\varphi(x+k) - \varphi x = 2phk\,f(x+k')[(a+x+k'')^2 + \tfrac{1}{3}f(x+k'')^2]$$

folglich

$$\varphi x = 2ph\int fx[(a+x)^2 + \tfrac{1}{3}y^2]$$

oder $x = r - r\,\mathrm{Cos}\,\delta$; $y = r\,\mathrm{Sin}\,\delta$ gesetzt

$$\varphi(r - r\,\mathrm{Cos}\,\delta) = 2ph\int r\,\mathrm{Sin}\,\delta\,[(a+r-r\,\mathrm{Cos}\,\delta)^2 + \tfrac{1}{3}r^2\,\mathrm{Sin}\,\delta^2]\,r\,\mathrm{Sin}\,\delta$$

$$= 2phr^2\Big[[(a+r)^2 + r^2]\int \mathrm{Sin}\,\delta^2 - 2r(a+r)\int \mathrm{Sin}\,\delta^2\,\mathrm{Cos}\,\delta - \tfrac{2}{3}r^2\int \mathrm{Sin}\,\delta^4\Big]$$

$$= 2phr^2\Big[(a^2+2ar+2r^2)\tfrac{1}{2}(\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta) - \tfrac{2}{3}r(a+r)\,\mathrm{Sin}\,\delta^3 - \tfrac{2}{3}r^2\,[-\frac{\mathrm{Sin}\,\delta^3\,\mathrm{Cos}\,\delta}{4} + \tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}(\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta)]\Big]$$

$$= 2phr^2[(a^2+2ar+\tfrac{3}{2}r^2)\tfrac{1}{2}(\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta) - \tfrac{2}{3}r\,\mathrm{Sin}\,\delta^3\,(a+r+\tfrac{1}{4}r\,\mathrm{Cos}\,\delta)]$$

wo keine Const. hinzukommt.

Für $\delta = \pi$ ergiebt sich hieraus das Moment der Trägheit des ganzen Cylinders

$$= p h r^2 \pi . (a^2 + 2 a r + \tfrac{3}{2} r^2)$$

oder, wenn Q das Gewicht desselben ausdrückt

$$= Q [(a+r)^2 + \tfrac{1}{2} r^2];$$

also das Quadrat der Entfernung seines Schwungspunktes von D, oder

$$g^2 = (a+r)^2 + \tfrac{1}{2} r^2.$$

§. 136.

Zusatz.

Ist $a = 0$, d. h. dreht sich der Cylinder um eine seiner Seiten, so ist das Moment der Trägheit

$$= Q . \tfrac{3}{2} r^2; \quad g^2 = \tfrac{3}{2} r^2.$$

Ist $a = -r$; d. h. dreht sich der Cylinder um seine Achse, so ist das Moment der Trägheit

$$= Q . \tfrac{1}{2} r^2; \quad g^2 = \tfrac{1}{2} r^2$$

d. h. man kann sich die Hälfte der Masse im Mantel vereint denken.

Dreht sich ein hohler Cylinder um seine Achse und bezeichnet ϱ den Halbmesser in Lichten, so ist also sein Moment der Trägheit

$$= p h r^2 \pi . \tfrac{1}{2} r^2 - p h \varrho^2 \pi . \tfrac{1}{2} \varrho^2$$

$$= \pi h p (r^2 - \varrho^2) . \frac{r^2 + \varrho^2}{2}.$$

§. 137.

Aufgabe.

Eine Kugel vom Halbmesser r und der Gewichts-Einheit p dreht sich um eine Achse D in

der Entfernung $a+r$ vom Mittelpunkt; man soll das Moment der Trägheit derselben $= M$, und die Entfernung e des Schwingungspunktes von D bestimmen.

Auflösung.

Man denke sich, normal auf $a+r$, zur Abscisse x gehörig, (*Fig.* 41) eine Kreis-Ebene durch die Kugel, setze den zu x gehörigen Kugel-Abschnitt $= Fx$; sein Moment der Trägheit $= \varphi x$; den Radius der Kreis-Ebene $= y = fx$, so fällt $\varphi(x+k) - \varphi x$ zwischen

$$p[F(x+k) - Fx].\ [(a+x)^2 + \tfrac{1}{4}fx^2] \text{ und}$$

$$p[F(x+k) - Fx][(a+x+k)^2 + \tfrac{1}{4}f(x+k)^2]$$

und man hat also, wenn k' die gewöhnliche Bedeutung hat, nach §. 132. 3;

$$\varphi(x+k) - \varphi x = p[F(x+k) - Fx][(a+x+k')^2 + \tfrac{1}{4}f(x+k')^2]$$

und hieraus

$$\varphi x = p \int F'x[(a+x)^2 + \tfrac{1}{4}y^2]$$

oder, weil $F'x = \pi y^2$ ist,

$$\varphi x = p\pi \int y^2 [(a+x)^2 + \tfrac{1}{4}y]$$

$$= p\pi \int (2rx - x^2)[a^2 + 2ax + x^2 + \tfrac{1}{4}(2rx - x^2)]$$

$$= \frac{p\pi x^2}{60}[60a^2r + 20x(4ar + r^2 - a^2) - 15(2a - r)x^2 - 9x^3].$$

Für $x = 2r$ folgt hieraus

$$M = \tfrac{4}{3}r^3\pi p[(a+r)^2 + \tfrac{2}{5}r^2]$$

oder, wenn Q das Gewicht der Kugel ausdrückt

$$M = Q . [(a+r)^2 + \tfrac{2}{5} r^2]$$

$$e = \sqrt{(a+r)^2 + \tfrac{2}{5} r^2}.$$

§. 138.

Zusatz.

Für $a = 0$; d. h. wenn die Kugel sich um eine ihrer Tangenten schwingt, ist

$$M = Q . \tfrac{7}{5} r^2$$

$$e = r \sqrt{\tfrac{7}{5}}.$$

Für $a = -r$; d. h. wenn die Kugel sich um ihren Durchmesser dreht, ist

$$M = Q . \tfrac{2}{5} r^2$$

$$e = r \sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

Aufgaben

zum siebenten Kapitel.

§. 139.

Aufgabe.

Ein normales Parallelepipedum ruht in seiner Mitte auf Zapfen, und befindet sich in diesen Zustand der Ruhe in horizontaler Lage. (*Fig.* 42.) Welche Kraft x muß auf das eine Ende dieses Balanciers wirken, damit der angegriffene Punkt in der Zeit t den Weg a zurücklege?

Auflösung.

Die halbe Länge des Balanciers sei $= l$; die Höhe $= h$; die Breite $= b$; in Fußen, das Ge-

wicht eines Cubicfußes seiner Materie $= p$; der Halbmesser der Zapfen $= \varrho$; der Reibungs-Coefficient der Zapfen-Reibung $= \mu$; so ist das Gewicht des Balanciers $= 2lbhp$; und wird nun der Theil der gesuchten Kraft x welcher mit dem Reibungswiderstand im Gleichgewicht steht, $= y$ gesetzt, so hat man die Gleichung

$$y \cdot l = \mu(2bhlp + y) \cdot \varrho$$

und hieraus

$$y = \frac{2\mu\varrho bhlp}{l - \mu\varrho}.$$

Bezeichnet ferner z den Theil der gesuchten Kraft x, welcher die bestimmte Bewegung erzeugt, Q das Gewicht der auf den Angrifspunkt reducirten Masse, so ist

$$a = g\frac{z}{Q} \cdot t^2; \text{ folglich}$$

$$z = \frac{aQ}{gt^2}.$$

Es ist aber nach §. 134, das Moment der Trägheit der zu bewegenden Masse

$$= 2bhlp\frac{l^2 + h^2}{3}; \text{ folglich}$$

$$Q = \tfrac{2}{3}\frac{bhlp(l^2 + h^2)}{l^2}; \text{ also}$$

$$z = \frac{a}{gt^2} \cdot \frac{2bhlp(l^2 + h^2)}{3l^2}; \text{ daher}$$

$$x = \frac{2\mu\varrho bhlp}{l - \mu\varrho} + \frac{2abhp(l^2 + h^2)}{3lgt^2}$$

oder auch, da $\mu\varrho$ gegen l nur sehr unbedeutend ist

$$x = 2\mu\varrho bhp + \frac{2abhp(l^2+h^2)}{3lgt^2}.$$

Ist $l = 10$; $b = 1$; $h = 2$; $\varrho = \frac{1}{8}$; $\mu = \frac{1}{6}$; $p = 60$ ℔; $a = 4'$; $t = \frac{4}{5}$ Secunden; so findet man

$$x = 6{,}66 + 332{,}8 = 339{,}46.$$

Es sind also zur Ueberwindung der Reibung, oder fürs statische Gleichgewicht nur 6,66 ℔; zur Hervorbringung der verlangten Bewegung aber 332,8 ℔ Kraft erforderlich. Bringt man weniger Kraft an, so entsteht, sie sei so wenig über 6,66 als man will, allemal eine Bewegung, aber desto langsamer, je geringer man die Ueberwucht macht.

Nimmt man die gesammte Kraft z. B. nur $= 10{,}66$, also die Ueberwucht $= 4$ ℔, so ist der Weg in der Zeit t ($= \frac{4}{5}$ Sec.)

$$= g\frac{4}{Q}\cdot(\tfrac{4}{5})^2$$

$$= \tfrac{125}{8}\cdot\tfrac{4}{832}\cdot\tfrac{16}{25} = \tfrac{5}{104}\text{ Fuß},$$

nicht ganz $= 7$ Linien.

Soll der Weg $a = 4$ Fuß durchlaufen werden, so würde die erforderliche Zeit hierzu

$$= \sqrt{\frac{Q\cdot 4}{g\cdot 4}} = \sqrt{\frac{832\cdot 8}{125}}$$

beinahe $= 7\frac{1}{3}$ Secunde sein.

§. 140.

Zusatz.

Die Auflösung in §. 139 ist nichts weniger als mathematisch scharf zu nennen, insofern die

Masse der Zapfen, und die Veränderlichkeit der Ueberwucht bei der Senkung des Balanciers unberücksichtigt geblieben ist. Indessen sind diese Einflüsse so gering, daß sie sehr wohl außer Betracht gelassen werden können.

Bei der Auflösung ist ferner die Kraft x als eine reine Kraft ohne Masse behandelt worden; ist dies nicht der Fall, sondern soll die Bewegung durch ein aufgelegtes Gewicht W hervorgebracht werden, so hat man

$$a = g \frac{z}{Q + W} t^2;$$

aber $z = W - y$; daher

$$a = g \frac{W - y}{Q + W} t^2; \text{ folglich}$$

$$W = \frac{gt^2 y + aQ}{gt^2 - a};$$

oder, wenn man die Werthe für y und Q substituirt

$$W = 2. \frac{3\mu\varrho bhlp gt^2 + abhp(l^2 + h^2)}{3l(gt^2 - a)}.$$

Bei den im vorigen §. angenommenen Zahlen erhält man

$$W = 565\tfrac{7}{9} \text{ ℔}.$$

§. 141.

Aufgabe.

Ein normaler Cylinder mit einer lothrechten Achse, soll durch eine in seinem Mantel angebrachte horizontal und tangential wirkende Kraft in der Zeit t einmal um seine Achse gedreht wer-

den. Wie groß muß die Kraft, mit Rücksicht auf die Reibungen sein?

Auflösung.

Der Halbmesser des Cylinders sei $= r$; seine Höhe $= h$ in Fußen, das Gewicht eines Cubic-Fußes $= p$; der Halbmesser der Zapfen der Achse $= \varrho$; die Kraft sei durch ein Seil vom Durchmesser $= \delta$ über eine Rolle vom Halbmesser $= a$ geleitet, und hänge dann als ein Gewicht von x ℔ lothrecht herab; ϱ' sei der Halbmesser der Zapfen der Rolle; W das Gewicht der Rolle nebst Zapfen.

Bezeichnet nun z die fürs Gleichgewicht mit der Reibung an den Zapfen der Achse des Cylinders erforderliche tangentiale Kraft in der Peripherie desselben, so hat man

$$z . r = r^2 \pi h p . \mu . \tfrac{2}{3} \varrho + z . \mu' . \varrho$$

also

$$z = \frac{\tfrac{2}{3} \varrho \mu . \; r^2 \pi h p}{r - \mu' \varrho};$$

wo μ den Reibungs-Coefficienten für gleitende, μ' den für Zapfen-Reibung bezeichnet; und die zu Hervorbringung dieser Gewalt z, in dem lothrecht herabhängenden Seil erforderliche Kraft $= y$ gesetzt,

$$y . a = z(a + \tfrac{1}{2}\delta^2) + \mu' . \varrho' . \sqrt{z^2 + (y + W)^2};$$

oder, genau genug

$$y . a = z(a + \tfrac{1}{2}\delta^2) + \mu' \varrho' . \sqrt{z^2 + (z + W)^2}$$

also

$$y = \frac{z\left(a + \frac{1}{2}\delta^2\right) + \mu'\varrho' . \sqrt{z^2 + (z + W)^2}}{a}.$$

Man hat also nun die Ueberwucht

$$= x - y;$$

das Gewicht der auf ihren Angriffspunkt reducirten Masse genau genug, nach §. 136;

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \pi h p + \tfrac{1}{2} W + Q + x$$

wenn Q das Gewicht des Seils bezeichnet; den Weg in der Zeit t

$$= 2 r \pi;$$

also nach der Formel $h = Gt^2$;

hier

$$2 r \pi = g \frac{x - y}{\frac{1}{2} r^2 \pi h p + \frac{1}{2} W + Q + x} . t^2;$$

folglich

$$x = \frac{r\pi(r^2 \pi h p + W + 2Q) + g t^2 y}{g t^2 - 2 r \pi}.$$

Ist $r = 2'$; $h = 2'$; $p = 160$ ℔; $\varrho = 1''$; $\delta = 1''$; $\varrho' = \frac{1}{2}''$; $a = 1'$; $W = 40$ ℔; $\mu = \frac{1}{4}$; $\mu' = \frac{1}{6}$; $Q = 10$ ℔; $t = 1$ Secunde; so erhält man

$z = 28$ ℔; $y = 30$ ℔; $x = 8558$ ℔.

Anmerk. Von mathematischer Schärfe ist in dieser Auflösung auch keine Rede, aber wohl ist sie vollkommen genau genug, in Hinsicht auf praktische Ausführung.

§. 142.

Aufgabe.

Ein normaler Cylinder hat eine horizontal liegende Achse und ruht in Zapfenlagern (*Fig.* 43);

er ist in gleichförmiger drehender Bewegung, derstalt daß seine Peripherien die Geschwindigkeit c haben. Mit welcher Kraft x muß man im Mental desselben tangential entgegenwirken, um in t Secunden die Bewegung zu vernichten.

Auflösung.

Bezeichnet r den Halbmesser, b die Höhe des Cylinders, ϱ den Halbmesser der Zapfen; p das Gewicht eines Cubic-Fußes der Materie des Cylinders; so ist seine Masse in den Mantel reducirt

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \pi b p;$$

die eben dahin reducirte Reibung

$$= \frac{\varrho}{r} \mu r^2 \pi b p;$$

also die verzögernde Ueberwucht

$$= x + \frac{\varrho}{r} \mu r^2 \pi b p;$$

folglich, wenn x keine Masse hat, sondern eine reine Kraft ist, die verzögernde Kraft

$$= \frac{x + \varrho \mu r \pi b p}{\frac{1}{2} r^2 \pi b p}.$$

Diese soll nun in der Zeit t die Geschwindigkeit c vernichten, folglich muß nach der Formel

$$c = 2g \frac{P}{Q} t; \text{ hier:}$$

$$c = 2g \frac{x + \varrho \mu r \pi b p}{\frac{1}{2} r^2 \pi b p} . t \text{ sein.}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$x = \frac{c . r^2 \pi b p}{4gt} - \varrho \mu r \pi b p.$$

Soll die Reibung allein die Bewegung all-

mählig vernichten, und die Zeit T bestimmt werden, nach Verlauf welcher der Stillstand erfolgt, so setze man x gleich Null; dann entsteht

$$\frac{c \cdot r^2 \pi b p}{4 g T} = \varrho \pi r b \mu p; \text{ also}$$

$$T = \frac{c \cdot r}{4 g \varrho \mu}.$$

Ist $r = 12'$; $b = 4'$; $\varrho = 2''$; $\mu = \frac{1}{6}$; $p = 60$ ℔; $c = 24'$; $t = 6$: so erhält man

$$x = 6681{,}37 \ldots \text{℔}.$$

Soll die Reibung allein den Stand der Ruhe hervorbringen, so ist die erforderliche Zeit

$$T = 165{,}888 \text{ Secunden}.$$

§. 143.

Aufgabe.

Eine horizontale Welle vom Gewicht Q und Halbmesser r machte gleichförmig n Umdrehungen in jeder Minute; und es wurde dadurch eine Last vom Gewicht W gehoben; wenn nun die Kraft, welche diese Bewegung erhielt, plötzlich zurück tritt, und es sollen noch m Umdrehungen bis zum Stillstand erfolgen, so soll bestimmt werden, welche Abmessungen zu dem Ende ein an der Welle angebrachter Schwungring haben muß.

Auflösung.

Es ist, bei den in *Fig.* 44 angedeuteten Abmessungen, ohne Berücksichtigung des Gewichts der Arme des Schwungrings, des Seils und der Zapfen, in die Peripherie der Welle reducirt, die verzö-

gernde Ueberwucht, wenn p das Gewicht eines Cubic-Fußes des Schwungsrings ausdrückt,

$$= W + \frac{\varrho}{r}\mu\,[W + Q + (b^2 - c^2)\pi p x]$$

die eben dahin reducirte Masse

$$= W + \frac{Q}{2} + \frac{\frac{1}{2}\pi x p\,(b^4 - c^4)]}{r^2};$$

die zu vernichtende Geschwindigkeit

$$= \frac{n.\,2r\pi}{60};$$

der Weg, der während dieser Vernichtung noch durchlaufen werden soll

$$= m.\,2r\pi;$$

also nach der Formel

$$c^2 = 4g\frac{P}{Q}h; \text{ hier}$$

$$\frac{n^2.4r^2\pi^2}{60^2} = 4g.\frac{W + \frac{\varrho}{r}\mu[W + Q + \pi p(b^2 - c^2)x]}{W + \frac{Q}{2} + \frac{1}{2}\pi p\frac{b^4 - c^4}{r^2}.\,x}.\,m.2r\pi$$

und hieraus

$$x = \frac{225000\,m[rW + \varrho\mu(W + Q)] - n^2r^2\pi(2W + Q)}{\pi p\,(b^2 - c^2)\,[n^2\pi(b^2 + c^2) - 225000\,m\,\varrho\mu]}.$$

Ist $W = 50$ ℔; $r = \frac{1}{2}$; $\varrho = \frac{1}{8}'$; $b = 3'$; $c = 2'$; $\mu = \frac{1}{5}$; $n = 20$; $p = 60$; $Q = 400$; $m = 1$; so erhält man

$$x = 0{,}791 \text{ Fuß} = 9\tfrac{1}{2} \text{ Zoll}.$$

Anmerk. Es ist eine sehr nützliche Uebung für den Anfänger, solche Aufgaben dadurch mehrere mal auf verschiedenen Wegen aufzulösen, daß man die Kräfte und Massen auf andere Punkte reducirt.

Wenn man z. B. alles auf die Peripherie des Schwungrings bringt, so hat man:

die verzögernde Ueberwucht

$$= W.\frac{r}{b}+\frac{\varrho}{b}\mu[W+Q+(b^2-c^2)\pi p x];$$

die Masse

$$= W.\frac{r^2}{b^2}+\frac{Q}{2}.\frac{r^2}{b^2}+\frac{\frac{1}{2}\pi p(b^4-c^4)x}{b^2}$$

die zu vernichtende Geschwindigkeit

$$= \frac{n.2b\pi}{60};$$

den Weg, während dieser Vernichtung

$$= m.2b\pi;$$ folglich

$$\frac{n^2.4b^2\pi^2}{60^2}=4g\frac{W\frac{r}{b}+\frac{\varrho}{b}\mu[W+Q+(b^2-c^2)\pi p x]}{W\frac{r^2}{b^2}+\frac{Q}{2}.\frac{r^2}{b^2}+\frac{\frac{1}{2}\pi p(b^4-c^4)x}{b^2}}m.2b\pi$$

welche Gleichung mit der in der ersten Auflösung vollkommen einerlei ist.

§. 144.

Aufgabe.

An einem vertical aufgehangenen normalen Parallelepipedum, von den Abmessungen l, b, h (*Fig.* 45) ist eine Kugel vom Halbmesser r befestigt; diese wird central von einer Masse deren Gewicht Q ist, mit der Geschwindigkeit c getroffen. Wenn nun sowohl Q als die Kugel vollkommen harte Körper sind, so soll bestimmt werden, mit welcher Geschwindigkeit x die Kugel nach erhaltenen Stoß ihre Bewegung anfängt.

Auflösung.

Durch die Mitte a der Breite h des Parallepipedums denke man sich eine horizontale auf das

Papier normale Drehungsachse, so ist das Moment der Trägheit des Parallelepipedums in Beziehung auf dieselbe, wenn p das Gewicht eines Cubic-Fußes seiner Materie ausdrückt nach §. 134

$$= 2 . \frac{bhlp}{2} . \frac{l^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{3}$$

$$= bhlp . \frac{8l^2 + h^2}{24}$$

folglich das Gewicht der Masse derselben auf die Richtungslinie von Q reducirt

$$= \frac{bhlp(8l^2+h^2)}{24(l+r)^2}.$$

Ferner, wenn q das Gewicht eines Cubic-Fußes der Kugel bezeichnet, nach §. 137 das Moment der Trägheit der Kugel

$$= \tfrac{4}{3} r^3 \pi . q . [(l+r)^2 + \tfrac{2}{5} r^2]$$

folglich das Gewicht der Masse derselben, eben dahin reducirt

$$= \frac{4r^3 \pi q [5(l+r)^2 + 2r^2]}{15(l+r)^2}$$

und also, nach §. 116

$$x = \frac{Q . c}{Q + \frac{bhlp(8l^2+h^2)}{24(l+r)^2} + \frac{4r^3 \pi q [5(l+r)^2 + 2r^2]}{15(l+r)^2}}.$$

Ist $Q = 40$ ℔; $c = 200$ Fuß; $l = 12'$; $h = 2'$; $b = 1'$; $r = 3'$; $p = 60$ ℔; $q = 400$ ℔, so erhält man

$$x = 0{,}172 \text{ Fuß};$$

mit welcher geringen Geschwindigkeit von ohngefähr 2 Zoll Weg in der Secunde die Bewegung der Kugel also anfangen würde.

Soll $x = 4$ Fuß sein, und der hierzu erforderliche Werth von Q bestimmt werden, so erhält man mit Beibehaltung aller übrigen Zahlen

$$Q = 953\tfrac{1}{2} \text{ tb.}$$

Achtes Kapitel.

Von der Fliehkraft.

---

§. 145.

Erklärung.

Wenn ein Körper in der Peripherie eines Kreises bewegt wird, so hat derselbe in jeden Augenblick das Bestreben, der Richtung der jedesmaligen Tangente zu folgen, sich also vom Mittelpunkt des Kreises zu entfernen, und dieses Bestreben nach der Richtung des Halbmessers dem Mittelpunkt zu entfliehen, heißt seine **Fliehkraft** oder **Centrifugalkraft.** Die gleich große Thätigkeit, welche nach der Richtung des Halbmessers entgegengesetzt im Mittelpunkt des Kreises wirken muß, um den Körper in der Peripherie zu erhalten, heißt die **Centripetalkraft.**

§. 146.

Lehrsatz.

Bezeichnet Q das Gewicht eines materiellen Punktes und ist dies Gewicht durch eine anderweitige Thätigkeit aufgehoben; c die Geschwindigkeit womit

womit sich Q in der Peripherie eines Kreises bewegt; r den Halbmesser desselben; P die Centrifugal also auch die Centripetalkraft, so ist:

$$P = \frac{c^2 Q}{2rg}.$$

Beweis.

Normal auf das Papier durch den Mittelpunkt m der geometrischen Kreis-Ebene *Fig.* 46, denke man sich eine Drehungsachse; in der Peripherie derselben bewege sich Q; Q sei jetzt in b; bg sei die Tangente in b; würde in diesen Augenblick die Centripetalkraft P vernichtet, so würde in der nächstfolgenden Zeit t, Q nach der Richtung dieser Tangente einen Weg $bf = c.t$ durchlaufen; wird dieselbe aber nicht vernichtet, so durchlauft Q in derselben Zeit t einen Kreisbogen $bn = ct$, und der Erfolg der Thätigkeit von P besteht also darin, daß P die Masse, vom Gewicht Q in der Zeit t um den Weg fn zurückhält, so daß also

$$fn = g\frac{P}{Q}.t^2 \text{ ist.}$$

Man ziehe $nm = r$ und fälle die Normalen nk, ne auf mb und bg, so ist,

$$\begin{aligned} fn^2 &= fe^2 + ne^2 \\ &= (bf - nk)^2 + (bm - km)^2 \end{aligned}$$

und, wenn β den zum Winkel nmb gehörigen Bogen für den Halbmesser $= 1$ bezeichnet,

$$\begin{aligned} fn^2 &= (bn - r\,\mathrm{Sin}\,\beta)^2 + (r - r\,\mathrm{Cos}\,\beta)^2 \\ &= (r\beta - r\,\mathrm{Sin}\,\beta)^2 + (r - r\,\mathrm{Cos}\,\beta)^2 \\ &= r^2(\beta^2 - 2\beta\,\mathrm{Sin}\,\beta + 2 - 2\,\mathrm{Cos}\,\beta) \end{aligned}$$

$$= r^2 \left[\beta^2 + 2 - 2\beta\left(\beta - \frac{\beta^3}{2.3} + \frac{\beta^5}{2.3.4.5} \ldots\right) - 2\left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{1.2.3.4} \ldots\right)\right]$$

$$= r^2 \left(\frac{\beta^4}{4} - \frac{\beta^6}{3.4.6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{r^2 \beta^4}{4} . \left(1 - \frac{\beta^2}{3.6} + \ldots\right) ; \text{ alſo}$$

$$fn = \frac{r\beta^2}{2} . \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{3.6} + \ldots} ; \text{ folglich}$$

$$g\frac{P}{Q}t^2 = \frac{r\beta^2}{2} . \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{3.6} + \ldots}$$

Es iſt aber

$$bf = bn = r\beta = ct; \text{ folglich}$$

$$\beta = \frac{ct}{r}; \text{ daher}$$

$$g\frac{P}{Q}t^2 = \frac{c^2 t^2}{2r} \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{3.6.r^2} + \ldots}$$

alſo

$$P = \frac{c^2 Q}{2gr} . \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{3.6.r^2} + \ldots}$$

Für den Augenblick in welchem Q ſich in b befindet, ergiebt ſich alſo die erforderliche Centripetalkraft P, wenn man $t = 0$ ſetzt, und es entſteht

$$P = \frac{c^2 Q}{2gr}.$$

Aufgaben
zum achten Kapitel.

§. 147.
Aufgabe.

Ein normaler Cylinder bewegt sich um seine Achse; wie groß ist seine Centrifugalkraft?

Auflösung.

Der Halbmesser sei $= r$; seine Höhe $= h$; das Gewicht eines Cubic-Fußes der Materie des Cylinders $= p$; die Anzahl Umdrehungen welche derselbe in jeder Minute macht, $= n$; die Centripetalkraft $= \varphi r$, so ist, wenn man sich r um k gewachsen denkt, $\varphi(r+k) - \varphi r$ die Centrifugalkraft, der Masse des hohlen Cylinders, dessen Gewicht

$$= [(r+k)^2 - r^2]\pi . hp \text{ ist.}$$

Es ist aber die Geschwindigkeit des innern Mantels desselben

$$= \frac{n . 2r\pi}{60};$$

die des äußern

$$= \frac{n . 2(r+k)\pi}{60},$$

so daß es also einen Werth für k', zwischen o und k liegend, geben muß, für welchen das c in §. 146, hier

$$= \frac{n . 2(r+k')\pi}{60}$$

zu setzen ist.

Eben so ist das r in §. 146, hier

$$= r + k''$$

zu setzen, unter k″ ebenfalls eine zwischen o und k liegende Größe gedacht.

Nach der Formel

$$P = \frac{c^2 Q}{2gr}$$

hat man also hier

$$\varphi(r+k) - \varphi r = \frac{\frac{n^2 (r+k')^2 \pi^2}{30^2} . (2r+k) k \pi h p}{2g . (r+k'')}$$

oder:

$$\varphi' r + \frac{k}{2} \varphi'' r + \ldots = \frac{n^2 \pi^3 h p}{2 . 30^2 . g} . \frac{(r+k')^2 (2r+k)}{r+k''}$$

und hieraus, für k = o;

$$\varphi' r = \frac{n^2 \pi^3 h p}{30^2 . g} . r^2; \text{ folglich}$$

$$\varphi r = \frac{n^2 \pi^3 h p}{30^2 . g} . \int r^2 \text{ oder}$$

$$\varphi r = \frac{n^2 \pi^3 . r^3 h p}{2700 . g} .$$

Ist bei einem Läufer einer Mühle n = 200; h = 2′; r = 2′; p = 160 ℔; so erhält man die Gewalt, welche auf Zersprengung der Materie wirkt, also die erforderliche absolute Festigkeit derselben = 75245 ℔.

§. 148.

Zusatz.

Soll der Cylinder-Mantel bestimmt werden, in welchem, in Beziehung auf die Centrifugalkraft die gesammte Masse des Cylinders als vereint an-

zusehen ist, so setze man den zugehörigen Halbmesser $= y$, so hat man in Beziehung auf die Formel

$$P = \frac{c^2 Q}{2gr};$$

$$P = \frac{n^2 \pi^3 . r^3 . h . p}{2700 . g}$$

$$c = \frac{n . 2y\pi}{60}$$

$$Q = r^2 \pi h p$$

$$r = y$$

also

$$\frac{n^2 \pi^3 r^3 hp}{2700 . g} = \frac{\left(\frac{n . 2 . y . \pi}{60}\right)^2 . r^2 \pi h p}{2g . y}$$

und hieraus

$$y = \tfrac{2}{3} r.$$

Es ist also in Beziehung auf Bestimmung der Fliehkraft, der Mittelpunkt der Masse, ein anderer Punkt als der Mittelpunkt des Schwungs (§. 128). Für den Cylinder hatte man nemlich §. 136

$$g^2 = \tfrac{1}{2} r^2; \text{ also } g = r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = r . 0,707.$$

§. 149.

Aufgabe.

Eine Kugel bewegt sich um ihre Achse; die Größe der Centrifugalkraft zu bestimmen.

Auflösung.

Der Halbmesser der Kugel sei $= r$; das Gewicht eines Cubic-Fußes ihrer Materie $= p$; die

Anzahl Umdrehungen welche dieselbe in jeder Minute macht $= n$; eine Abscisse vom Scheitelpunkt aus, auf der Achse genommen $= x$; die zugehörige rechtwinklichte Ordinate $= fx$; die Fliehkraft der zu x und fx gehörigen Kugel-Abschnitts $= \varphi x$; so wird wenn x und k wächst die Fliehkraft der körperlichen Zone von der Höhe k begränzt von den parallelen Ebenen $(fx)^2 . \pi$ und $f(x+k)^2 \pi$ durch $\varphi(x+k) - \varphi x$ ausgedrückt sein.

Nach §. 147 ist also

$$\varphi(x+k) - \varphi x > \frac{n^2 \pi^3 . (fx)^3 . k . p}{2700 . g} \text{ und}$$

$$\varphi(x+k) - \varphi x < \frac{n^2 . \pi^3 . f(x+k)^3 . kp}{2700 . g}$$

und folglich muß es einen zwischen o und k liegenden Werth k′ geben, für welchen

$$\varphi(x+k) - \varphi x = \frac{n^2 \pi^3 . f(x+k')^3 . k . p}{2700 . g} \text{ ist.}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\varphi x = \frac{n^2 \pi^3 . p}{2700 . g} . \int (fx)^3$$

oder $x = F\beta = r - r \operatorname{Cos} \beta$; also

$fx = r \operatorname{Sin} \beta$ gesetzt,

$$\varphi(r - r \operatorname{Cos} \beta) = \frac{n^2 \pi^3 p}{2700 . g} . \int r^3 \operatorname{Sin} \beta^3 r \operatorname{Sin} \beta$$

$$= \frac{n^2 . \pi^3 . p . r^4}{2700 . g} \int \operatorname{Sin} \beta^4$$

$$= \frac{n^2 \pi^3 p . r^4}{2700 . g} \left[- \frac{\operatorname{Sin}\beta^3 \operatorname{Cos}\beta}{4} + \tfrac{3}{8}(\beta - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta) \right]$$

wo keine Const. hinzukommt, weil mit x auch β und φx verschwinden.

Für $x = 2r$; also $\beta = \pi$; wird

$$\varphi(2r) = \frac{n^2 \pi^3 . p . r^4}{2700 . g} . \tfrac{3}{8}\pi,$$

und man hat also die Größe der verlangten Centrifugalkraft

$$= \frac{n^2 . \pi^4 . p . r^4}{7200 . g} .$$

Ist $n = 200$; $r = 2'$; $p = 160$ ℔, so erhält man

$$\varphi 4 = 88664 \text{ ℔}.$$

§. 150.

Zusatz.

Soll der Cylinder-Mantel zu der Drehungsachse, bestimmt werden, in welchen man sich in Beziehung auf Centrifugalkraft die gesammte Masse der Kugel als vereint denken kann, so setze man den zugehörigen Halbmesser $= y$; so entsteht wie in §. 148 die Gleichung

$$\frac{\left(\frac{n . 2 y \pi}{60}\right)^2 . \tfrac{4}{3} r^3 \pi p}{2g . y} = \frac{n^2 . \pi^4 p . r^4}{7200 . g}$$

und hieraus

$$y = \frac{3\pi}{16} . r = 0{,}589 . r.$$

In Beziehung auf das Moment der Trägheit hatte man §. 138

$$e = r . \sqrt{\tfrac{2}{5}} = 0{,}632 . r$$

und folglich ist

$$e - y = 0{,}043 . r.$$

§. 151.

Aufgabe.

An einer lothrechten Achse hängt ein gewichtloser Faden mit einer Kugel, dem Halbmesser r und der Gewichts-Einheit p zugehörig. Wenn nun diese Achse in jeder Minute n Umdrehungen macht, so soll der Winkel x bestimmt werden, welchen dann der Faden mit der Achse bildet. (*Fig.* 47.)

Auflösung.

Bezeichnet a die Länge des Fadens vom Befestigungspunkt an der Achse bis zum Mittelpunkt der Kugel, und nimmt man näherungsweise die Masse der Kugel in Beziehung auf Centrifugalkraft in dem in §. 137 bestimmten Punkt als vereint an, so ist die Entfernung dieses Punktes von der Drehungsachse

$$= \sqrt{a^2 \operatorname{Sin} x^2 + \tfrac{2}{5} r^2}$$

also die Geschwindigkeit desselben

$$= \frac{n \,.\, 2\pi \sqrt{a^2 \operatorname{Sin} x^2 + \tfrac{2}{5} r^2}}{60};$$

folglich die Centrifugalkraft nach §. 146

$$\frac{\dfrac{n^2 \pi^2 (a^2 \operatorname{Sin} x^2 + \tfrac{2}{5} r^2)}{30^2} \,.\, \tfrac{4}{3} r^3 \pi \,.\, p}{2g \,.\, \sqrt{a^2 \operatorname{Sin} x^2 + \tfrac{2}{5} r^2}}$$

$$= \frac{n^2 \pi^3 \,.\, r^3 p \,.\, \sqrt{a^2 \operatorname{Sin} x^2 + \tfrac{2}{5} r^2}}{45 \,.\, 30 \,.\, g}.$$

Setzt man nun diese $= P$; das Gewicht der Kugel $\tfrac{4}{3} r^3 \pi p = Q$, so sind P, Q und die gegenwirkende Spannkraft des Fadens, drei im Mittel-

punkt der Kugel zusammentreffende unter sich Gleichgewicht haltende Kräfte.

Nach dem Parallelogramm der Kräfte hat man daher

$$Q \cdot \tang x = P;$$

oder, wenn man die Werthe substituirt,

$$\frac{4}{3} r^3 \pi p \cdot \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{n^2 \pi^3 r^3 p \sqrt{a^2 \operatorname{Sin} x^2 + \frac{2}{5} r^2}}{45 \cdot 30 \cdot g}$$

und hieraus folgt:

$$\operatorname{Sin} x^4 + \left(\frac{5^{10} \cdot 3^4}{\pi^4 \cdot n^4 a^2} + \frac{2 r^2}{5 a^2} - 1 \right) \operatorname{Sin} x^2 - \frac{2 r^2}{5 a^2} = 0.$$

Betrachtet man die Masse der Kugel als in ihren Mittelpunkt vereint, so erhält man

$$\operatorname{Cos} x = \frac{2 \cdot 30^2 \cdot g}{n^2 \pi^2 \cdot a} = \frac{3^2 \cdot 5^5}{n^2 \cdot \pi^2 \cdot a}.$$

Ist $n = 60$; $r = 1'$; $a = 10'$ so ergiebt sich aus der ersten Gleichung $x = 85° \; 29'$; aus der zweiten aber $x = 85° \; 28'$.

§. 152.

Zusatz.

Will man die Aufgabe §. 151 mathematisch genau auflösen, so stößt man auf ein höchst verwickeltes Integral.

Neuntes Kapitel.

Vom Pendel.

---

§. 153.

Erklärung.

Wird ein Faden oder eine Stange an einem festen Punkt so aufgehangen, daß Drehung um diesen Punkt erfolgen kann, und am andern Ende des Fadens oder der Stange ein Gewicht befestigt, so heißt diese Verbindung ein **Pendel**.

Das Pendel heißt **einfach**, wenn der Faden oder die Stange als eine mathematische Linie, ohne Gewicht und ohne Masse, und der daran befestigte Körper als ein schwerer Punkt zu betrachten ist, sonst **zusammengesetzt**. Erhebt man den Körper, doch so, daß seine Entfernung vom Drehpunkt dieselbe bleibt, und überläßt ihn dann frei den Einwirkungen der Schwere, so wird er, alle Hindernisse als beseitigt angesehen, fortdaurend sinken, und wieder zur ersten Höhe steigen, und jeder Hergang oder Zurückgang heißt ein Schwung, Pendelschlag (Oscillation).

Die größte Abweichung des Fadens oder der Stange von der Verticallinie, heißt der **Erhebungs oder Elongations-Winkel**.

§. 154.

Lehrsatz.

Bezeichnet r die Länge des Fadens vom Aufhängepunkt an, bis zum schweren Punkt des einfachen Pendels, t die Zeit eines Schwungs in Secunden, α den zum Halbmesser = 1 gehörigen Bogen des Erhebungswinkels, so ist, wenn α nicht über 15 Grad ist, mit hinreichender Schärfe

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{r} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - \mathrm{Sinv}\,\alpha}}.$$

Beweis.

Es sei a (*Fig.* 48) der Aufhängepunkt; ab = r eine Verticallinie; ban der Erhebungswinkel; der Bogen nm = rz; np normal auf ab, also horizontal, folglich bp = r Sinv α; mq normal auf ab; also

$$bq = x = r\,\mathrm{Sinv}\,(\alpha - z);\quad aq = r\,\mathrm{Cos}\,(\alpha - z).$$

Wird der Bogen nm = rz in der Zeit t′ durchlaufen, und bezeichnet c die in m erlangte Geschwindigkeit, Q das Gewicht des schweren Punktes, P die Ueberwucht in dem Augenblick wo derselbe in m angekommen ist, so ist P gleich dem Produkt aus Q in den Sinus des Neigungswinkels der Tangente in m gegen den Horizont, also

$$P = Q.\ \mathrm{Sin}\,(\alpha - z);$$

folglich, weil Q unveränderlich ist, die beschleunigende Kraft in diesem Augenblick, als Funktion des zurückgelegten Wegs

$$= \mathrm{Sin}\,(\alpha - z);$$

daher nach §. 82. III.

$$c = \sqrt{4g \int \operatorname{Sin}(\alpha - z) . d(rz)}$$

$$= \sqrt{-4gr \int \operatorname{Sin}(\alpha - z)\, d(\alpha - z)}$$

$$= \sqrt{+4gr \operatorname{Cos}(\alpha - z) + \text{Const.}}$$

Für $z = 0$; ist auch $c = 0$; daher

Const $= -4gr \operatorname{Cos} \alpha$; folglich

$$c = \sqrt{4g [r \operatorname{Cos}(\alpha - z) - r \operatorname{Cos} \alpha]}$$

$$= \sqrt{4g . pq} \text{ wie §. 112.}$$

Ferner ist nach §. 82. IV.

$$t' = \int \frac{d(rz)}{c}$$

$$= r \int \frac{dz}{\sqrt{4gr [\operatorname{Cos}(a - z) - \operatorname{Cos} \alpha]}}.$$

Setzt man nun $z = fx$

$$= \alpha - \operatorname{Arc Cos} \frac{r - x}{r} \text{ so entsteht}$$

$$t' = \frac{r}{\sqrt{4g}} . \int \frac{d\left(\alpha - \operatorname{Arc Cos} \frac{r - x}{r}\right)}{\sqrt{r \operatorname{Sin} v \alpha - x}}$$

$$= -\frac{r}{\sqrt{4g}} . \int \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)(r \operatorname{Sin} v \alpha - x)}}$$

oder

$$t' = -\frac{r}{\sqrt{4g}} \int \frac{dx}{\sqrt{rx \operatorname{Sin} v \alpha - x^2} . \sqrt{2r - x}}.$$

Dies Integral ist nur näherungsweise durch Reihen zu bestimmen. Um diese zu vermeiden kann man für die gewöhnlichen Fälle wo α nur klein, also x nur ein geringer Theil von r ist, in dem

Ausdruck $\sqrt{2r-x}$ für x seinen Mittelwerth $\frac{1}{2}bp$ oder $\frac{1}{2}r\,\mathrm{Sinv}\,\alpha$ setzen, so entsteht mit hinreichender Schärfe

$$t' = -\frac{r}{\sqrt{4g(2r-\frac{1}{2}r\,\mathrm{Sinv}\,\alpha)}}\int\frac{dx}{\sqrt{rx\,\mathrm{Sinv}\,\alpha - x^2}}.$$

Es ist aber

$$\int\frac{dx}{\sqrt{rx\,\mathrm{Sinv}\,\alpha - x^2}} = \int\frac{d\left(\frac{2}{r\,\mathrm{Sinv}\,\alpha}.x\right)}{\sqrt{2.\frac{2x}{r\mathrm{Sinv}\alpha}-\left(\frac{2x}{r\mathrm{Sinv}\alpha}\right)^2}}$$

$$= \mathrm{Arc\,Sinv}\,\frac{2x}{r\,\mathrm{Sinv}\,\alpha};$$ folglich

$$t' = -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2g(4-\mathrm{Sinv}\alpha)}}.\,\mathrm{Arc\,Sinv}\,\frac{2x}{r\,\mathrm{Sinv}\,\alpha} + C.$$

Für $x = r\,\mathrm{Sinv}\,\alpha$; wird $t' = o$; also

$$\mathrm{Const} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2g(4-\mathrm{Sinv}\alpha)}}.\,\pi;$$

daher vollständig

$$t' = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2g(4-\mathrm{Sinv}\,\alpha)}}.\left(\pi - \mathrm{Arc\,Sinv}\,\frac{2x}{r\,\mathrm{Sinv}\,\alpha}\right)$$

Setzt man $x = o$; so ergiebt sich die Zeit eines halben Schwungs

$$= \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2g(4-\mathrm{Sinv}\,\alpha)}}.\,\pi,$$

und da die Zeit der Erhebung eben so groß ist, so folgt also

$$t = \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{2g(4-\mathrm{Sinv}\,\alpha)}}.\,\pi$$ oder

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{2g}}.\sqrt{r}.\frac{2}{\sqrt{4-\mathrm{Sinv}\,\alpha}}.$$

§. 155.

Zusatz.

Für $\alpha = 15°$ ist $\text{Sinv } 15° = 0{,}0340742$ und $\frac{2}{\sqrt{4 - \text{Sinv } \alpha}}$ nur wenig über 1. In solchen Fällen kann man also

$$t = \pi . \sqrt{\frac{r}{2g}} \text{ setzen.}$$

§. 156.

Zusatz.

Mit Hülfe des Pendels hat man $g = 15\frac{5}{8} = \frac{125}{8}$ rheinländische Fuße, für unsere Gegenden gefunden.

Für $t = 1$ ergiebt sich die Länge des einfachen Secundenpendels $= 3' \, 2''$.

Die Hydraulik.

Erstes Kapitel.

Wasser-Mengen Bestimmungen.

§. 157.

Aufgabe.

Durch einen auf die Richtung des bewegten Wassers normalen Querschnitt von a Quadrat-Fußen, fließt das Wasser mit einer Geschwindigkeit von c Fußen in der Secunde. Man soll die in jeder Secunde durchfließende Wasser-Menge M, durch a und c bestimmen.

Auflösung.

Die durch den Querschnitt a, in jeder Secunde fließende Wasser-Menge M, bildet ein Prismen; dessen Grund-Ebene $= a$ und dessen Höhe $= c$ ist. Es muß also die Anzahl Cubic-Fuße welche in jeder Secunde abgeführt werden $= a \cdot c$ sein, d. h. es ist

$$M = ac.$$

§. 158.

Aufgabe.

In einem Gefäß befindet sich im horizontalen Boden desselben, eine Oeffnung; das Wasser stehe

im Gefäß h Fuß über den horizontalen Boden und werde durch stetigen Zufluß immer in bleibender Höhe erhalten; man soll die Geschwindigkeit c bestimmen, mit welcher das Wasser aus dieser Oeffnung fließt.

Auflösung.

Der hydrostatische Druck des Wassers auf jede ausfließende Schicht ist hier die bewegende Kraft, welche der Wasser-Masse jeder Schicht die Geschwindigkeit c mittheilt. Versteht man daher unter b die lothrechte Höhe jeder solchen Schicht, unter a die Anzahl Quadrat-Fuße des Querschnitts der Oeffnung, so ist das Gewicht der Masse, welcher während der Durchlaufung des Weges b die Geschwindigkeit c mitgetheilt wird $= ab\gamma$ (unter γ, wie bisher, das Gewicht eines Cubic-Fußes Wasser verstanden), und die darauf einwirkende bewegende Kraft $= ah\gamma$; folglich die beschleunigende

$$= \frac{ah\gamma}{ab\gamma} = \frac{h}{b};$$

daher, nach der Formel

$$c = 2\sqrt{g\frac{P}{Q}h} \text{ §. 66. VI, hier}$$

$$c = 2\sqrt{g\frac{h}{b}.b}, \text{ oder}$$

$$c = 2\sqrt{gh} = 7{,}9.\sqrt{h};$$

d. h. die Geschwindigkeit, welche das Wasser beim Ausfluß, durch die Druckhöhe h, erlangt, ist eben so groß als die, welche ein frei fallender Körper im letzten Au-

genblick der Durchlaufung der Fallhöhe h, erlangt haben würde.

§. 159.

Zusatz.

Die Formel $c = 2\sqrt{g}.\sqrt{h} = 7{,}9.\sqrt{h}$ des vorigen §. kann nur in denen Fällen ein vollkommen richtiges Resultat liefern, in welchen der horizontale Querschnitt A des Gefäßes eben so groß ist wie der a der Oeffnung. Ist aber, wie gewöhnlich, $A > a$; so entsteht auf jede ausfließende Schicht, so wie auch auf alle darüber stehende, durch das benachbarte Wasser, ein Seitendruck, und hierdurch eine Ablenkung der Richtung der Bewegung von der lothrechten Linie, also eine Zusammenziehung (Contraktion) des ausströmenden Wasserstrahls. Durch dies Eindrängen des benachbarten Wassers in die Oeffnung wird aber nothwendig eine Verminderung der lothrechten Geschwindigkeit in der Oeffnung hervorgebracht, und diese Verminderung ist abhängig von der Form der Oeffnung, von der Dicke der Wand in welcher die Oeffnung angebracht ist, so wie auch von dem Verhältniß zwischen a und A.

Ist A sehr groß gegen a, so ist nach Eytelweins Versuchen (Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik von Eytelwein. Berlin 1801) bei Oeffnungen in sehr dünnen Wänden

$$c = 4{,}89.\sqrt{h}$$

und bei kurzen Ansatz-Röhren oder so dicken Wän-

den, daß das ausfließende Wasser, am Ende, den Wänden der Oeffnung wieder folgt

$$c = 6{,}42 . \sqrt{h}.$$

§. 160.

Zusatz.

Diejenige Zahl, welche für 7,9 gesetzt und mit $\sqrt{h}$ multiplicirt werden muß, damit das Produkt, mit Rücksicht auf die Contraktion, die Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in die Ausfluß-Oeffnung liefere, heißt der Contraktions-Coefficient, und soll durchaus durch α ausgedrückt werden, so daß also

$$c = \alpha . \sqrt{h} \text{ ist.}$$

Der aus $c = \alpha . \sqrt{h}$ sich ergebende Werth heißt dann die wirkliche; der aus $c = 7{,}9 . \sqrt{h}$ hervorgehende aber die hypothetische Geschwindigkeit; $h = \frac{c^2}{\alpha^2}$ die Geschwindigkeitshöhe oder auch die Druckhöhe.

Die in der Ausübung am öftesten vorkommenden Werthe für α sind am Ende dieses ersten Kapitels §. 198, nach Eytelweins Angaben zusammengestellt.

Anmerk. Mit Rücksicht auf das Verhältniß von A zu a giebt Eytelwein für c folgende hypothetische Formel an:

$$c = \frac{\alpha\sqrt{h}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{4g}\right)\frac{a}{A}}}.$$

§. 161.

Aufgabe.

Die Wasser-Menge M zu bestimmen, welche aus einer Oeffnung a im horizontalen Boden eines Gefäßes, in welchem das Wasser beständig durch stetigen Zufluß auf einerlei Höhe h erhalten wird, in jeder Secunde ausfließt.

Auflösung.

Nach §. 157 ist $M = ac$ und nach §. 160; $c = \alpha \sqrt{h}$, daher

$$M = \alpha a \sqrt{h}.$$

Beim Gebrauch dieser Formel, so wie überhaupt aller folgenden sind alle Abmessungen in Fußen auszudrücken, indem α als Erfahrungswerth die Stelle von $2\sqrt{g}$ einnimmt, g aber $= 15\frac{5}{8}$ rheinländische Füße bedeutet.

§. 162.

Erklärung.

Fließt das Wasser normal durch einen nicht horizontalen Querschnitt, so finden in den verschiedenen Stellen desselben auch verschiedene Ausfluß Geschwindigkeiten des Wassers statt und man nennt diejenige Geschwindigkeit bei welcher, wenn sie in allen Punkten des Querschnitts statt fände, eben so viel Wasser ausfließen würde, als bei den wirklich statt findenden verschiedenen Geschwindigkeiten, die **mittlere Geschwindigkeit**. Bezeichnet v dieselbe, a den Querschnitt des fließenden Wassers,

M die Wasser-Menge in der Secunde, so ist nach §. 157

$$v = \frac{M}{a}; \text{ und nach §. 160}$$

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2};$$

die, der mittleren Geschwindigkeit zugehörige Geschwindigkeitshöhe.

Die Entfernung vom Wasserspiegel bis zur tiefsten Stelle der Oeffnung heißt der **Wasserstand**.

§. 163.

Aufgabe.

In der ebenen Seiten-Wand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes befindet sich eine Oeffnung; der Wasserspiegel im Gefäß werde durch stetigen Zufluß immer in bleibender Höhe erhalten; man soll die Wasser-Menge M bestimmen, welche in jeder Secunde ausfließt.

Auflösung.

Die Ebene der Seiten-Wand, in welcher sich die Oeffnung befindet, sei unter dem Winkel β gegen die Vertical-Linie geneigt; durch den höchsten Punkt der Oeffnung denke man sich eine Vertical-Ebene, normal auf die Ebene der Seitenwand, in welcher sich die Oeffnung befindet; *Fig.* 49 sei diese Vertical-Ebene; A der höchste Punkt der Oeffnung; AB die Durchschnittslinie der Ebene der Oeffnung mit der Vertical-Ebene; in D berühre der Wasserspiegel; DA sei $= e$; AC $= x$

eine beliebige Abscisse; $y = fx$ bezeichne die zugehörige rechtwinklichte, also horizontale, quer durch die Oeffnung laufende Ordinate; φx die zu x und y gehörige Ebene und Fx die in jeder Secunde durch φx fließende Menge Wassers.

Man denke sich x um k gewachsen, so bezeichnet $F(x+k) - Fx$ die Wasser-Menge in der Secunde, welche durch den zwischen fx und $f(x+k)$ liegenden, k Fuß breiten, Streifen $\varphi(x+k) - \varphi x$ ausfließt. Diese Wassermenge ist aber nothwendig größer wie

$$\alpha . [\varphi(x+k) - \varphi x] . \sqrt{(e+x)\,\mathrm{Cos}\,\beta}$$

und kleiner, wie

$$\alpha [\varphi(x+k) - \varphi x] \sqrt{(e+x+k)\,\mathrm{Cos}\,\beta} \quad (\S.\ 161.)$$

und es muß also einen zwischen o und k liegenden Werth k' geben, für welchen

$$F(x+k) - Fx = \alpha[\varphi(x+k) - \varphi x]\sqrt{(e+x+k')\,\mathrm{Cos}\,\beta}$$

ist.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man zuvörderst die taylorsche Reihe anwendet, dann mit k dividirt, und zuletzt k, also auch k' gleich Null setzt:

$$F'x = \alpha . \varphi' x . \sqrt{(e+x)\,\mathrm{Cos}\,\beta} \text{ und hieraus}$$

$$Fx = \alpha \sqrt{\mathrm{Cos}\,\beta} . \int \varphi' x . \sqrt{e+x} + C.$$

Es ist aber $y = \varphi' x$; daher

$$Fx = \alpha \sqrt{\mathrm{Cos}\,\beta} . \int y . \sqrt{e+x} + C.$$

§. 164.

Zusatz.

Nach §. 162 ist also hier die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \frac{\alpha \sqrt{\cos\beta} . \int y \sqrt{e+x} + C}{\varphi x}$$

und die zugehörige Höhe, oder

$$h' = \frac{\cos\beta . (\int y \sqrt{e+x} + C)^2}{(\varphi x)^2}.$$

§. 165.

Aufgabe.

Für verschiedene der Form nach bestimmte Ausfluß-Oeffnungen, in ebenen Seitenwänden die Wasser-Menge M durch Formeln darzustellen.

Auflösung.

I. Die Oeffnung sei rechtwinklicht, mit horizontalen Grundlinien $= b$; die Höhe sei $= h$; so ist die Wasser-Menge

$$Fx = \alpha \sqrt{\cos\beta} . \int b . \sqrt{e+x}$$

$$= \alpha b \sqrt{\cos\beta} . \tfrac{2}{3} (e+x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \tfrac{2}{3} \alpha b \sqrt{\cos\beta .} (e+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3} \alpha b \sqrt{\cos\beta .} e^{\frac{3}{2}};$$

oder

$$Fx = \tfrac{2}{3} \alpha b \sqrt{\cos\beta .} [(e+x)^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}}]$$

also

$$Fh = \tfrac{2}{3} \alpha b \sqrt{\cos\beta} [(e+h)^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}}].$$

II. Ist $\beta = 0$; d. h. befindet sich die Oeffnung in einer verticalen Seitenwand, wie gewöhnlich bei Schütz-Oeffnungen, so ist

$$Fh = M = \tfrac{2}{3} \alpha b [(e+h)^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}}];$$

die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \frac{2\alpha[(e+h)^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}}]}{3h}$$

und die mittlere Geschwindigkeitshöhe

$$h' = \frac{4[(e+h)^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}}]^2}{9h^2}.$$

III. Ist $e = o$; d. h. reicht die Oeffnung bis zum Wasserspiegel, wie bei Ueberfällen, so hat man

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha . b . h^{\frac{3}{2}}$$
$$v = \tfrac{2}{2}\alpha\sqrt{h} = \alpha . \sqrt{\tfrac{4}{9}h}$$
$$h' = \tfrac{4}{9}h.$$

Anmerkung.

Aus $h' = \frac{4}{9}h$ ersieht man, daß der Punkt der mittleren Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers nicht mit dem Schwerpunkt der Oeffnung zusammenfällt, sondern höher liegt, und zwar bei einer rechtwinklichten oben offenen Oeffnung um $\frac{1}{2}h - \frac{4}{9}h$ oder um $\frac{1}{18}h$ höher als der Schwerpunkt. Da nun diese Verschiedenheit, der Entfernung des Schwerpunkts der Oeffnung vom Wasserspiegel, von der Entfernung des Mittelpunkts der Geschwindigkeit vom Wasserspiegel, auch in diesen Fall, wo sie am größten ist, nur von geringen Einfluß sich zeigt, indem $\sqrt{\frac{4}{9}h} = 0{,}6666\sqrt{h}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}h} = 0{,}7070.\sqrt{h}$ ist, so kann man in den Fällen, in welchen die, in der auf die Ebene der Oeffnung normalen Vertical-Ebene, befindliche Abmessung der Oeffnung gering gegen die Entfernung ihres Schwerpunktes vom Wasserspiegel ist, den Schwerpunkt

zugleich als Mittelpunkt der Geschwindigkeit ansehen. Für die Formel

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha b\,[(e+h)^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}}]$$

erhält man dann nach §. 161, die Näherungs-Formel

$$M = \alpha b h.\sqrt{e+\tfrac{1}{2}h}.$$

Ist z. B. bei einer verticalen Schützöffnung $e = 3'$; $h = 1'$; so erhält man nach der vollkommenen ersten Formel

$$M = 1{,}869.\,\alpha b$$

und nach der Näherungs-Formel

$$M = 1{,}870.\,\alpha b.$$

IV. In einer verticalen Wand befindet sich eine dreieckige Oeffnung, deren horizontale Grundlinie $= b$, und Höhe $= h$ ist; die Spitze befindet sich in der Entfernung e vom Wasserspiegel (*Fig.* 50); man soll die Wasser-Menge M in der Secunde bestimmen.

Bezeichnet x eine Abscisse von der Spitze herein auf h gemessen, y die zugehörige rechtwinklichte Ordinate, so ist

$$y = \frac{bx}{h};\ \text{also}$$

$$Fx = \frac{\alpha b}{h}\int x.\sqrt{e+x}$$

$$= \frac{2\alpha b}{3h}\int x.\,d(e+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2\alpha b}{3h}.\,[x(e+x)^{\frac{3}{2}} - \int(e+x)^{\frac{3}{2}}.\,dx]$$

$$= \frac{2\alpha b}{3h}[x(e+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}(e+x)^{\frac{5}{2}}] + C$$

$$= \frac{2\alpha b}{3h}\left[x(e+x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{5}(e+x)^{\frac{5}{2}}\right];$$

folglich

$$M = Fh = \frac{2\alpha b}{15h}\left[(3h-2e)(e+h)^{\frac{3}{2}} + 2.e^{\frac{5}{2}}\right].$$

V. Für $e = 0$; entsteht

$$M = \tfrac{2}{5}\alpha b h\sqrt{h};$$

die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \tfrac{4}{5}\alpha\sqrt{h};$$

und die Entfernung des Mittelpunkts der Geschwindigkeit vom Wasserspiegel, oder

$$h' = \tfrac{16}{25}h.$$

VI. Ist das Dreieck in umgekehrter Lage, so wie *Fig.* 51, so ergiebt sich eben so wie in IV, die Wasser-Menge welche durch das Trapez $\frac{b+y}{2}x$ fließt

$$= \frac{2\alpha b}{3h}\left[(h-x)(e+x)^{\frac{3}{2}} - h.e^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$+ \frac{4\alpha b}{15h}\left[(e+x)^{\frac{5}{2}} - e^{\frac{5}{2}}\right]$$

und hieraus, für $x = h$ die Wasser-Menge, welche aus der ganzen dreieckigen Oeffnung in der Secunde ausfließt

$$= \frac{2\alpha b}{15h}\left[2(e+h)^{\frac{5}{2}} - (5h+2e)e^{\frac{3}{2}}\right].$$

Ist $x = h$; und $e = 0$; so erhält man die Wasser-Menge

$$= \tfrac{4}{15}\alpha b h\sqrt{h};$$

die zugehörige mittlere Geschwindigkeit

$$v = \tfrac{8}{15}\alpha\sqrt{h}$$

und die Höhe der mittleren Geschwindigkeit, oder

$$h' = \frac{64}{225} h.$$

VII. In einer verticalen Wand befindet sich eine dem Halbmesser r zugehörige, bis an den Wasserspiegel reichende kreisförmige Oeffnung (*Fig.* 52); die Wasser-Menge M in der Secunde zu bestimmen.

Es ist bei den in der Figur angedeuteten Bezeichnungen:

$$Fx = \alpha \int y . \sqrt{x} . dx$$
$$= \alpha \int 2 r \operatorname{Sin} \beta . \sqrt{r - r \operatorname{Cos} \beta} . d(r - r \operatorname{Cos} \beta)$$
$$= 2 \alpha r^2 \sqrt{r} . \int \operatorname{Sin} \beta \sqrt{1 - \operatorname{Cos} \beta} . \operatorname{Sin} \beta . d\beta$$

oder $\beta = 2\delta$ gesetzt

$$= 2 \alpha r^2 \sqrt{r} . \int \operatorname{Sin} 2\delta^2 . \sqrt{2} . \operatorname{Sin} \delta . 2 d\delta$$
$$= - 16 \alpha r^2 \sqrt{2r} . \int \operatorname{Sin} \delta^2 \operatorname{Cos} \delta^2 \, d \operatorname{Cos} \delta$$
$$= - 16 \alpha r^2 . \sqrt{2r} \left(\int \operatorname{Cos} \delta^2 \, d \operatorname{Cos} \delta - \int \operatorname{Cos} \delta^4 d \operatorname{Cos} \delta \right)$$
$$= - 16 \alpha r^2 \sqrt{2r} . \left(\tfrac{1}{3} \operatorname{Cos} \delta^3 - \tfrac{1}{5} \operatorname{Cos} \delta^5 \right) + C$$
$$= - \tfrac{16}{15} \alpha r^2 . \sqrt{2r} . (5 - 3 \operatorname{Cos} \delta^2) \operatorname{Cos} \delta^3 + C.$$

Für $x = 0$; also auch $\beta = 0$ und $\delta = 0$ ergiebt sich

$$\text{Const} = + \tfrac{16}{15} \alpha r^2 \sqrt{2r} . 2$$

folglich die Wasser-Menge

$$= \tfrac{16}{15} \alpha r^2 \sqrt{2r} \left[2 - (5 - 3 \operatorname{Cos} \delta^2) \operatorname{Cos} \delta^3 \right].$$

Für $x = 2r$; also $\beta = \pi$; $\delta = \frac{1}{2}\pi$ erhält man

$$F(2r) = M = \tfrac{32}{15} \alpha . r^2 . \sqrt{2r};$$

also die mittlere Geschwindigkeit, oder

$$v = \frac{\frac{32}{15} \alpha r^2 . \sqrt{2r}}{r^2 \pi} = \frac{32 . \alpha . \sqrt{2}}{15 . \pi} . \sqrt{r}$$

und die zugehörige Höhe, oder

$$h' = \frac{2 \cdot 32^2}{15^2 \cdot \pi^2} \cdot r = 0{,}922 \cdot r.$$

§. 166.

Aufgabe.

Mehrere oben offene Gefäße communiciren mit einander wie es *Fig.* 53 im lothrechten Durchschnitt anzeigt. Der Wasserspiegel im ersten I wird in unveränderliche Höhe erhalten; man soll die nach eingetretenen Beharrungszustand in jeder Secunde abfließende Wasser-Menge M bestimmen.

Auflösung.

Wenn das Wasser in I in unveränderlicher Höhe erhalten wird, so fließt im ersten Augenblick, wenn II noch leer ist, aus der Communications-Oeffnung vom Querschnitt a das Wasser mit derjenigen Geschwindigkeit aus I in II welche der Geschwindigkeits-Höhe der Oeffnung a entspricht. Nun vertheilt sich aber das Wasser auf den Boden von II und kommt mit einer sehr geringen, auch der Richtung nach, veränderten Geschwindigkeit zur Communications-Oeffnung a' mit III, so daß, wenn auch a' bedeutend größer wie a wäre, doch nicht alles aus a ankommende Wasser, in derselben Zeit durch a' abfließen wird. So wie sich also nun das Wasser in II, wegen des stärkeren Zuflusses und geringeren Abflusses, sammlet, so entsteht in a, weil sich ein Gegendruck erzeugt, eine geringere, in a' aber eine wachsende Geschwindigkeit, bis zu dem Augenblick in welchen die Geschwindigkeit in a bis

zu derjenigen Größe c abgenommen, die in a' aber bis zur der Größe c' angewachsen ist, für welche $ac = a'c'$ ist. Eben so verhält es sich in den folgenden Gefäßen, in Beziehung auf die Oeffnungen a''; a''' u. s. w. und den zugehörigen, nach erfolgten Beharrungszustand, stattfindenden Geschwindigkeiten c''; c''' u. s. w.

Bezeichnet also M die dann aus jeder Oeffnung abfließende Wasser-Menge, so hat man die Gleichungen

I. $M = ac$; $M = a'c'$; $M = a''c''$; $M = a'''c'''$ u. s. w.

Wenn nun die ganze Geschwindigkeitshöhe vom Wasserspiegel in I bis zum Mittelpunkt der Geschwindigkeit in der letzten Oeffnung durch h ausgedrückt wird, x; x'; x'' u. s. w. aber die den Geschwindigkeiten c; c'; c'' u. s. w. zugehörige Höhen bezeichnen, so hat man

II. $h = x + x' + x''$ u. s. w. und

III. $c = \alpha\sqrt{x}$; $c' = \alpha\sqrt{x'}$; $c'' = \alpha\sqrt{x''}$ u. s. w.

Die Gleichungen I mit denen III multiplicirt, geben

IV. $M = \alpha a\sqrt{x}$; $M = \alpha a'\sqrt{x'}$; $M = \alpha a''\sqrt{x''}$ u. s. w.

und aus ihnen erhält man

V. $x = \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2$; $x' = \left(\frac{M}{\alpha a'}\right)^2$; $x'' = \left(\frac{M}{\alpha a''}\right)^2$ u. s. w.

Substituirt man nun diese Werthe in II, so entsteht

$$h = \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{M}{\alpha a'}\right)^2 + \left(\frac{M}{\alpha a''}\right)^2 + \text{u. s. w.}$$

oder

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \ldots\ldots\right]$$

und hieraus

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \ldots\ldots}}$$

§. 167.

Zusatz.

Sind n Oeffnungen und alle von gleicher Größe, also $a = a' = a''$ u. s. w., so entsteht

$$h = n . \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2 \text{ und}$$

$$M = \alpha a \sqrt{\frac{h}{n}}.$$

§. 168.

Erklärung.

Ein Ueberfall oder Wehr heißt **vollkommen**, wenn der Wasserspiegel des Unterwassers niedriger liegt, als die Oberfläche der Ueberlaßschwelle; **unvollkommen**, wenn er höher liegt.

§. 169.

Aufgabe.

In einem Fluß, dessen mittlere Breite = B ist, wird ein vollkommener Ueberfall von der Breite b und Höhe k angelegt, (*Fig.* 54, im Längenprofil) über welchen das Wasser mit der Höhe H abfließt; M bezeichne die Wasser-Menge, welche in jeder

Secunde abgeführt wird. Man soll eine Gleichung zwischen B, b, k, H und M darstellen.

Auflösung.

Befände sich der Ueberfall an einem See, so daß das Wasser hinter dem Ueberfall als stillstehend anzusehen wäre, so hätte man nach §. 165. III

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha b . H^{\frac{3}{2}} = \alpha b H . \sqrt{\tfrac{4}{9}H};$$

und die, der mittleren Geschwindigkeit, des durch den Querschnitt bH fließenden Wassers, zugehörige Höhe, also

$$= \tfrac{4}{9}H.$$

Weil aber das Wasser schon mit irgend einer Geschwindigkeit, welche c heißen mag, vor dem Ueberfall ankommt, und die zu c gehörige Geschwindigkeitshöhe $= \frac{c^2}{4g}$ ist, so ist also die, der mittleren Geschwindigkeit im Querschnitt bH zugehörige Höhe

$$= \tfrac{4}{9}H + \frac{c^2}{4g}; \text{ folglich}$$

$$M = \alpha b H . \sqrt{\tfrac{4}{9}H + \frac{c^2}{4g}}.$$

Zu Bestimmung von c, als Mittelwerth aller der verschiedenen Geschwindigkeiten, des Wassers vor dem Ueberfall, hat man aber nach §. 157 die Gleichung

$$B(H+k) . c = M; \text{ folglich}$$

$$c = \frac{M}{B(H+k)}; \text{ also}$$

$$M = \alpha b H . \sqrt{\tfrac{4}{9}H + \frac{M^2}{4g B^2 (H+k)^2}}.$$

§. 170.

§. 170.

Zusatz.

Aus der Gleichung in vorigen §. entspringt

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha b H^{\frac{3}{2}} . \frac{B(H+k)}{\sqrt{B^2(H+k)^2 - \frac{\alpha^2}{4g} b^2 H^2}};$$

$$b = \frac{M}{\alpha H . \sqrt{\tfrac{4}{9} H + \frac{M^2}{4g B^2 (H+k)^2}}};$$

Die vollständige Bestimmung von H führt aber auf eine Gleichung vom fünften Grad.

Will man diese vermeiden, und doch mit hinreichender Genauigkeit für die Ausübung, den Werth für H darstellen, so kann man folgendergestalt verfahren.

Ohne Rücksicht auf c, wäre aus der Gleichung

$M = \tfrac{2}{3}\alpha b . H^{\frac{3}{2}}$;

$$H = \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Giebt man nun der Gleichung in §. 169 folgende Form

$$M^2 = \tfrac{4}{9}\alpha^2 b^2 H^3 + \frac{\alpha^2 b^2 M^2}{4g B^2 . \left(1 + \frac{k}{H}\right)^2}$$

und setzt, an die Stelle von H, in dem zweiten Glied, dessen Einfluß ohnedem gering ist, den Werth $\left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}}$, so entsteht

$$M^2 = \tfrac{4}{9}\alpha^2 b^2 H^3 + \frac{\alpha^2 b^2 M^2}{4g B^2 \left[1 + k . \left(\frac{2\alpha b}{3M}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2}$$

und hieraus

$$H = \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{\alpha^2 \cdot b^2}{4gB^2\left[1 + k\left(\frac{2\alpha b}{3M}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2}}.$$

§. 171.

Zusatz.

Ist M, B, b und die ursprüngliche Tiefe h des Wassers im Flusse, ehe der Ueberfall angelegt ist, gegeben; die Erhöhung e des Wasserspiegels aber bestimmt, und soll diesen Bestimmungsgrößen entsprechend, die Höhe k des Ueberfalls gefunden werden, so hat man

$$h + e = k + H;$$

folglich, wenn man diesen Werth für k + H in die Gleichung §. 169 substituirt

$$M = \alpha b H \sqrt{\tfrac{4}{9}H + \frac{M^2}{4gB^2(h+e)^2}}$$

und hieraus

$$H^3 + \frac{9M^2}{16gB^2(e+h)^2} \cdot H^2 - \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^2 = 0.$$

Ist aus dieser Gleichung H gefunden, so hat man dann

$$k = h + e - H.$$

Will man auch hier die cubische Gleichung vermeiden, so setze man im zweiten Glied $\frac{9M^2}{16gB^2(e+h)^2}$ H^2, dessen Einfluß, wegen des kleinen Coefficienten $\frac{9M^2}{16gB^2(e+h)^2}$, der $\frac{9}{4} \cdot \frac{c^2}{4g}$ also $\frac{9}{4}$ der, der schon vorhandenen Geschwindigkeit zugehörigen, Höhe ist,

für H den Näherungswerth $\left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}}$ §. 170; so entsteht die Näherungsgleichung

$$H^3 + \frac{9M}{16gB^2(e+h)^2} \cdot \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^2 = 0$$

und hieraus

$$H = \sqrt[6]{\left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^2 - \frac{9M^2}{16gB^2(e+h)^2} \cdot \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{4}{3}}}.$$

§. 172.

Aufgabe.

In einem Fluß dessen mittlere Breite $= B$ und mittlere Tiefe $= h$ ist, wird ein unvollkommener Ueberfall von der Höhe k und Breite b angelegt, durch welchen der Wasserspiegel der abfließenden Wasser-Menge M in der Secunde, um die Höhe H aufgestauet wird. Man soll eine Gleichung zwischen diesen Größen B, h, k, b, M, H herleiten. *(Fig. 55.)*

Auflösung.

Bezeichnet c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers vor dem Ueberfall, x die zugehörige Geschwindigkeitshöhe, so ist wie in §. 169

$$c = \frac{M}{B(h+H)};$$

$$x = \frac{M^2}{4gB^2(h+H)^2}.$$

Es ist also die der mittleren Geschwindigkeit zugehörige Höhe, für den Querschnitt b. H

$$= \tfrac{4}{9}H + x$$

und für den Querschnitt $b(h-k)$

$$= H + x$$

also die Wasser-Menge, welche durch bH in der Secunde abfließt

$$= \alpha . bH . \sqrt{\tfrac{4}{9}H + x}$$

und die, welche durch $b(h-k)$ abgeführt wird,

$$= \alpha b(h-k)\sqrt{H+x};$$ daher

$$M = \alpha b\left[H\sqrt{\tfrac{4}{9}H+x} + (h-k)\sqrt{H+x}\right]$$

oder

$$M = \alpha b\left[H\sqrt{\tfrac{4}{9}H + \frac{M^2}{4gB^2(h+H)^2}} + (h-k)\sqrt{H + \frac{M^2}{4gB^2(h+H)^2}}\right].$$

§. 173.

Zusatz.

Aus der im vorigen §. hergeleiteten Gleichung ist b sowohl wie k sehr leicht zu entwickeln. Die Bestimmung von M ist ebenfalls ohne Schwierigkeit indem man auf eine Gleichung vom vierten Grad stößt, die sich auf eine unreine quadratische reducirt, weil nur die vierte und zweite Potenz von M erscheint. Die Bestimmung von H führt aber auf eine sehr weitläuftige höhere Gleichung. Um diese zu vermeiden, setze man anfänglich Näherungsweise c, also auch x gleich o, so hat man

$$M = \alpha b(\tfrac{2}{3}H + h - k)\sqrt{H}$$

und hieraus findet man durch eine unreine cubische Gleichung einen Näherungs-Werth für H,

welchen H′ ausdrücken soll. Nun gebe man der vollständigen Gleichung in §. 172 die Form

$$M = \alpha b \left[\sqrt{\tfrac{4}{9}H^3 + \frac{M^2}{4gB^2\left(1+\frac{h}{H}\right)^2}} + (h-k)\sqrt{H + \frac{M^2}{4gB^2(h+H)^2}} \right].$$

und setze für H den Näherungs-Werth H′ an diejenigen Stellen, wo der Einfluß von der wenigeren Bedeutung ist, so entsteht

$$M = \alpha b \left[\sqrt{\tfrac{4}{9}H^3 + \frac{M^2}{4gB^2\left(1+\frac{h}{H'}\right)^2}} + (h-k)\sqrt{H' + \frac{M^2}{4gB^2(h+H')^2}} \right]$$

und hieraus

$$H = \sqrt[3]{\left[\frac{3M}{2\alpha b} - \tfrac{3}{2}(h-k)\sqrt{H' + \frac{M^2}{4gB^2(h+H')^2}}\right]^2 - \frac{9M^2}{16gB^2\left(1+\frac{h}{H'}\right)^2}}$$

§. 174.

Zusatz.

In denjenigen Fällen, wo es zu übersehen ist, daß x nur sehr klein werden kann, setze man den Einfluß von x oder $\frac{c^2}{4g}$ ganz bei Seite, so hat man für vollkommene Ueberfälle die Formel

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha b H^{\frac{3}{2}}$$

und für unvollkommene

$$M = \alpha b(\tfrac{2}{3}H + h - k)\sqrt{H}.$$

§. 175.

Aufgabe.

Durch ein Gerinne, einen Canal, Graben oder Fluß, fließt das Wasser bei unveränderlichen Querschnitt a auf die Länge λ, welcher das Gefälle oder die Senkung des Wasserspiegels, α zugehört, in einerlei Richtung, gleichförmig ab, dergestalt daß der Wasserspiegel mit dem Grundbett als parallel anzusehen ist. Der ebenfalls auf die Länge λ unveränderliche benetzte Umfang des Profils sei $= p$; man soll die mittlere Geschwindigkeit (§. 162) c und die in jeder Secunde abfließende Wasser-Menge M bestimmen, vorausgesetzt, daß man für ein anderes Gerinne, Canal, Graben oder Fluß für welchen a'; λ'; α'; p'; M'; c'; dieselben Größen bezeichnen die Werthe für a'; λ'; α'; p' gemessen, den zugehörigen Werth von M' aber durch einen Versuch bestimmt hat.

Auflösung.

1) Da das Wasser auf einer geneigten Ebene abfließt, so ist nach §. 76 die beschleunigende Kraft gleich dem Sinus des Winkels gegen den Horizont, oder da, bei so kleinen Winkeln, die Tangente für den Sinus gesetzt werden kann, wenn β diesen Winkel ausdrückt, $= \tang \beta = \frac{\alpha}{\lambda}$ und dieser Kraft gemäß müßte das Wasser eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen. Da sich aber, wie vorausgesetzt wird, das Wasser gleichförmig fortbewegt, so müssen die Hindernisse, welche Adhäsion

und Cohäsion erzeugen, in solchen Fällen, auf jedes Wasser-Element eben so stark entgegengesetzt einwirken, als die beschleunigende Kraft vorwärts treibt. Bezeichnet man daher diese auf jedes Wasser-Element entgegenwirkende Thätigkeit in beiden Profilen durch w; w'; so hat man die Gleichungen

$$w = \frac{\alpha}{\lambda};\ w' = \frac{\alpha'}{\lambda'}.$$

2) Je größer p ist, desto mehr Punkte finden statt, an welchen sich das Wasser los reißen muß, und man kann also, blos in Hinsicht auf die Verschiedenheit der Umfänge schließen

$$w : w' = p : p'.$$

3) Je größer a ist, auch desto mehr Wassertheilchen vertheilen sich die Hindernisse am Umfang, desto weniger kommt also auf jedes einzelne, und, blos in Hinsicht auf die Verschiedenheit der Querschnitte kann man also schließen

$$w : w' = a' : a \text{ oder}$$

$$w : w' = \frac{1}{a} : \frac{1}{a'}.$$

4) Je größer c ist, an desto mehr Punkten des Umfangs muß sich ein und dasselbe Wassertheilchen in derselben Zeit losreißen, und desto weniger Zeit kann auf die Ueberwindung jedes einzelnen Widerstands verwendet werden, so daß um so mehr Kraftaufwand jedesmal erforderlich ist. Blos in Hinsicht auf die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten in zwei Querschnitten verhält sich also in Beziehung auf die Menge der Berührungspunkte in gleichen Zeiten

$$w : w' = c : c'$$

und in Hinsicht auf den Kraftaufwand zur Ueberwindung, der um so größer sein muß, als die dazu zu verwendende Zeit kleiner ist,

$$w : w' = c : c';$$

also in beiden Hinsichten

$$w : w' = c^2 : c'^2.$$

5) Faßt man die Resultate in 2; 3; 4 zusammen, so folgt nach der Lehre von Zusammensetzung der Verhältnisse

$$w : w' = \frac{p c^2}{a} : \frac{p' . c'^2}{a'}$$

und setzt man nun für w und w' die Werthe aus 1; so entsteht

$$\frac{\alpha}{\lambda} : \frac{\alpha'}{\lambda'} = \frac{p . c^2}{a} : \frac{p' . c'^2}{a'} .$$

6) Da $c = \frac{M}{a}$; $c' = \frac{M'}{a'}$ ist, so ergiebt sich wenn man diese Werthe in die hergeleitete Proportion substituirt,

$$\frac{\alpha}{\lambda} : \frac{\alpha'}{\lambda'} = \frac{p M^2}{a^3} : \frac{p' . M'^2}{a'^3}$$

und hieraus

$$M = \left(\frac{p' . M'^2 . \lambda'}{a'^3 . \alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} . a . \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} . \frac{a}{p}}$$

7) Insoferne nun p'; a'; λ'; α' als gemessene Größen; M' aber (als der Werth der entsprechenden Wasser-Menge in der Secunde) als eine durch einen Versuch bekannte Größe, Zahlen sind, so ist der Werth von

$$\left(\frac{p'.M'^2.\lambda'}{a'^3.\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

eine, der Voraussetzung nach gegebene Zahl und soll durch n ausgedrückt werden. Als Auflösung der Aufgabe hat man daher, weil $c = \frac{M}{a}$ ist, die beiden Formeln

$$\text{I. } c = n.\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}.\frac{a}{p}}$$

$$\text{II. } M = na.\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}.\frac{a}{p}}.$$

§. 176.

Zusatz.

Beziehen sich alle Abmessungen auf rheinländisches Fußmaaß, so ist nach einem, aus Versuchen des Ritters du Bûat, entnommenen Mittelwerth:

n = 90,9 folglich

$$\text{I. } c = 90{,}9.\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}.\frac{a}{p}}$$

$$\text{II. } M = 90{,}9.a.\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}.\frac{a}{p}}.$$

§. 177.

Zusatz.

Nach einer schärferen Theorie von Eytelwein in den Abhandlungen der mathematischen Classe der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1814 und 15 auf die Versuche von du Bûat, Brünnigs, Funk und Wolt-

man begründet, ist ebenfalls in Fußmaaß

$$c = -0{,}1057 + \sqrt{8715{,}6\,\frac{\alpha}{\lambda}\,.\,\frac{a}{p} + 0{,}01118}.$$

§. 178.

Zusatz.

Einigen von mir berechneten Zahlenfällen zufolge kommt das Resultat der Formel §. 176, dem der Formel §. 177 näher, wenn man n nur = 90 setzt. Wird außerdem, da der Werth des Quotienten $\frac{\alpha}{\lambda}$ derselbe bleibt, in welchem Maaß man auch beide gleichartigen Größen α und λ ausdrücken mag, α in Zollen und λ immer = 100 Ruthen genommen, also $\lambda = 14400$ gesetzt, so entsteht weil $\sqrt{14400} = 120$ und $\frac{90}{120} = \frac{3}{4}$ ist

$$\text{I.}\quad c = \tfrac{3}{4}\sqrt{\alpha\,.\,\frac{a}{p}}$$

$$\text{II.}\quad M = \tfrac{3}{4}\,a\,.\sqrt{\alpha\,.\,\frac{a}{p}}$$

in welchen beide Formeln dann aber unter α immer das in Zollen ausgedrückte Gefälle auf 100 Ruthen zu verstehen ist, die übrigen Größen p, c, a, M aber in rheinländischen Längen, Flächen und Cubic-Fuß-Maaß zu verstehen sind.

§. 179.

Zusatz.

Aendert ein Fluß bei einer Anschwellung des Wassers nicht sein Gefälle, wohl aber den Quer-

schnitt a und den Umfang p; wird nemlich ersterer $= A$; letzterer $= P$, so ändert sich auch seine Geschwindigkeit c; ihre nachherige Größe sei $= C$.

Nach §. 178 ist dann hier

$$c = \tfrac{3}{4} . \sqrt{\alpha . \frac{a}{p}} \text{ und}$$

$$C = \tfrac{3}{4} \sqrt{\alpha . \frac{A}{P}} \text{ folglich}$$

$$\text{I. } c : C = \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{A}{P}} .$$

Bezeichnet b die mittlere Breite; h die mittlere Tiefe für a und haben B und H dieselbe Bedeutung in Beziehung auf A, so läßt sich diese Proportion auch folgendergestalt ausdrücken

$$\text{II. } c : C = \sqrt{\frac{bh}{b+2h}} : \sqrt{\frac{BH}{B+2H}} .$$

Ist b, also auch B bedeutend groß, h so wie H klein gegen die Breite so kann man nähernd $b : B = 1$ und auch $(b+2h) : (B+2H) = 1$ setzen, und für solche Fälle ergiebt sich also aus II das Näherungs-Gesetz

$$\text{III. } c : C = \sqrt{h} : \sqrt{H} .$$

§. 180.

Aufgabe.

Unter allen rechtwinklichten Profilen von einerlei Inhalt a das vortheilhafteste, d. h. dasjenige anzugeben, für welches, bei einem gegebenen Gefälle α, die Wasser-Menge M ein Größtes wird.

Auflösung.

Bezeichnet x die Breite; y die Höhe des Rechtecks, so entstehen die beiden Gleichungen

$$1)\ xy = a$$

$$2)\ M = \tfrac{3}{4}a.\sqrt{\alpha.\frac{a}{x+2y}} = \text{Maxim.}$$

und ihren Bedingungen geschieht Genüge, für denjenigen Werth von x, welcher $\varphi x = x + \frac{2a}{x}$ zu einem Minimum macht. Es entsteht aus $\varphi' x = 0$; $x = \sqrt{2a}$ und $\varphi''(\sqrt{2a}) =$ positiv; daher ist M ein Größtes für $x = \sqrt{2a}$ und $y = \sqrt{\tfrac{1}{2}a}$ d. h. für $x = 2y$.

Das halbe Quadrat erfüllet demnach die Forderungen der Aufgabe.

§. 181.

Zusatz.

Soll zur Tiefe h ein symmetrisch dossirtes Profil angegeben werden, welches mit dem in §. 180 einerlei Inhalt und einerlei Umfang hat, also eben so gut ist, wie das beste rechtwinklichte, so ergeben sich, wenn man die Grundbreite $= x$, die Ausladung $= y$ setzt, die beiden Gleichungen

$$1)\ hx + hy = 2h^2$$

$$2)\ x + 2\sqrt{h^2 + y^2} = 4h$$

und hieraus

$$x = \tfrac{2}{3}h;\ y = \tfrac{4}{3}h.$$

Für das beste rechtwinklichte Profil unter allen von gleichen Inhalt, oder für das eben so gute symmetrisch dassirte hat man also, wenn h die Tiefe bezeichnet,

$$p = 4h;\ a = 2h^2;\ \text{folglich}$$

$$\text{I.}\quad c = \tfrac{3}{4}\sqrt{\alpha.\frac{h}{2}}$$

$$\text{II.}\quad M = \tfrac{3}{2}h^2.\sqrt{\alpha.\frac{h}{2}}.$$

§. 182.

Aufgabe.

Unter allen symmetrisch dossirten Profilen von einerlei Inhalt a und einerlei Grundbreite b, bei gegebenen Gefälle α dasjenige zu bestimmen, welches die größte Wasser-Menge M abführt.

Auflösung.

Bezeichnet x die Tiefe, y die Ausladung, so entstehen die beiden Gleichungen

$$1)\quad bx + xy = a$$

$$2)\quad M = \tfrac{3}{4}a.\sqrt{\alpha.\frac{a}{b+2\sqrt{x^2+y^2}}} = \text{Max.}$$

oder

$$1)\quad bx + xy = a$$

$$2)\quad x^2 + y^2 = \text{Min.}$$

und aus ihnen

$$x^4 + abx - a^2 = 0.$$

§. 183.

Aufgabe.

Unter allen symmetrisch dossirten Profilen von einerlei Inhalt a und einerlei Tiefe h, bei gegebenen Gefälle α, dasjenige zu bestimmen für welches M ein Maximum wird.

Auflösung.

Die Grundbreite sei $= x$; der zum Winkel welchen die Dossirung mit der Verticallinie bildet, gehörige Bogen für den Halbmesser Eins $= y$, so hat man die beiden Gleichungen

$$1)\quad hx + h^2 \operatorname{tang} y = a$$

$$2)\quad x + 2h \operatorname{Sec} y = \text{Min.}$$

und hieraus

$$1)\quad h\,dx = -h^2 \operatorname{Sec} y^2 .\, dy$$

$$2)\quad dx = -2h \operatorname{Sec} y .\, \operatorname{tang} y .\, dy.$$

Der Quotient beider Gleichungen giebt $\operatorname{Sin} y = \frac{1}{2}$; also den zugehörigen Winkel $= 30°$; folglich

$$x = \frac{a - h^2 \operatorname{tang} 30°}{h}$$

$$= \frac{a}{h} - h . \sqrt{\tfrac{1}{3}} \text{ und}$$

$$p = \frac{a + h^2 \sqrt{3}}{h}; \text{ also}$$

$$c = \tfrac{3}{4} \sqrt{\alpha . \frac{ah}{a + h^2 \sqrt{3}}}$$

$$M = \tfrac{3}{4} a . \sqrt{\alpha . \frac{ah}{a + h^2 \sqrt{3}}} .$$

§. 184.

Aufgabe.

Unter allen symmetrisch dossirten Profilen von einerlei Inhalt a und einerlei Winkel β der Dossirung mit der Verticallinie, die Abmessungen desjenigen zu bestimmen, für welches M ein Maximum wird.

Auflösung.

Die Grundbreite sei $= x$; die Höhe $= y$, so ergeben sich die Gleichungen

$$1)\quad xy + y^2 \tan\beta = a$$

$$2)\quad x + 2y \operatorname{Sec}\beta = \text{Minim.}$$

Aus ihnen folgt

$$xdy + ydx + 2ydy . \tan\beta = 0 \quad \text{und}$$

$$dx + 2dy \operatorname{Sec}\beta = 0;$$

diese beiden geben

$$y = x \frac{\operatorname{Cos}\beta}{2(1 - \operatorname{Sin}\beta)} \quad \text{oder} = x \frac{1 + \operatorname{Sin}\beta}{2 \operatorname{Cos}\beta}$$

und aus dieser Gleichung und der ersten erhält man

$$y = \sqrt{\frac{a \operatorname{Cos}\beta}{2 - \operatorname{Sin}\beta}};$$

$$x = 2(1 - \operatorname{Sin}\beta)\sqrt{\frac{a}{(2 - \operatorname{Sin}\beta)\operatorname{Cos}\beta}}.$$

§. 185.

Aufgabe.

Unter allen symmetrisch dossirten Profilen von einerlei Inhalt a, bei gegebenen Gefälle α, die Abmessungen desjenigen zu bestimmen, für welches M ein Maximum wird.

Auflösung.

Die Grundbreite sei $= x$; die Länge der Dossirung $= y$. Nach §. 183 muß, für jede Tiefe, der Winkel der Dossirung mit der Verticallinie $= 30°$ werden, und es ergeben sich daher die beiden Gleichungen

$$1)\quad xy \operatorname{Cos} 30° + y^2 \operatorname{Sin} 30° \operatorname{Cos} 30° = a$$
$$2)\quad x + 2y = \text{Minim.}$$

und hieraus

$$1)\quad x dy + y dx + y dy = 0$$
$$2)\quad dx + 2 dy = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt sogleich

$$x = y$$

so daß also das halbe reguläre Sechseck unter allen symmetrisch dossirten Profilen von einerlei Inhalt a das vortheilhafteste ist.

Aus 1, folgt nun

$$x = y = \tfrac{2}{3}\sqrt{a\sqrt{3}}.$$

§. 186.

Zusatz.

Bezeichnet h die Tiefe eines solchen halben regulären Sechsecks, so ist die Seite

$$= h \operatorname{Sec} 30° = \frac{2h}{\sqrt{3}};$$

die Ausladung

$$= \sqrt{\frac{4h^2}{3} - h^2} = \frac{h}{\sqrt{3}};\ \text{folglich}$$

$$p = \frac{6h}{\sqrt{3}} = 2h\sqrt{3};$$

a = h²

$$a = h^2 \sqrt{3}; \text{ daher}$$

$$c = \tfrac{3}{4} . \sqrt{\alpha . \frac{h}{2}}$$

$$M = \tfrac{3}{4} . h^2 . \sqrt{\alpha . \frac{3h}{2}} .$$

§. 187.

Aufgabe.

Für irgend eine mit den Ufern parallele Richtung sei die Geschwindigkeit des Wassers auf der Oberfläche $= c$; man soll hieraus, für die zugehörige Verticallinie von der Tiefe h die mittlere Geschwindigkeit v bestimmen.

Auflösung.

Erfahrungen zufolge nimmt die Geschwindigkeit auf jeden Fuß Tiefe um $0{,}008 . c$ ab. Sie ist also hiernach unten, im letzten Punkt der Tiefe von h Fußen $= c - 0{,}008 . c . h$; daher die mittlere Geschwindigkeit für h

$$= \frac{c + c - 0{,}008 c . h}{2} \text{ oder } v = c . (1 - 0{,}004 . h).$$

§. 188.

Zusatz.

Kann man in Profilen, für welche die Voraussetzungen bei Herleitung der du Bûatschen Formeln

$$c = \tfrac{3}{4} \sqrt{\alpha . \frac{a}{p}}$$

$$M = \tfrac{3}{4} a . \sqrt{\alpha . \frac{a}{p}}$$

nicht statt finden, an mehreren Stellen der Oberfläche, parallel mit den Ufern, die Geschwindigkeiten messen, so läßt sich hieraus, mit Hülfe von §. 187, wenn man die mittlere Geschwindigkeit für eine Verticallinie als mittlere Geschwindigkeit eines schmalen von verticalen Linien begränzten Streifens, in dessen Mitte die erwähnte Verticallinie liegt, gelten läßt, durch Multiplication derselben mit diesen Streifen die Wasser-Menge, welche durch diesen Streifen abgeführt wird, und so dann, durch Summirung aller dieser Resultate, auch die gesammte abfließende Wasser-Menge M näherungsweise bestimmen. Der Quotient $\frac{M}{a}$ giebt dann, wenn a einen ganzen Querschnitt bezeichnet, die demselben zugehörige mittlere Geschwindigkeit des Wassers.

§. 189.

Aufgabe.

Das Grundbette eines Canals oder Gerinnes mit rechtwinklichten Querschnitt sei horizontal, also, da Abfluß des Wassers erfolgt, der Wasserspiegel geneigt. Die unveränderliche Grundbreite sei $= b$ Fuß, die Tiefe an irgend einer Stelle sei $= h$ Fuß; in einer Entfernung von l Fuß oberhalb sei sie $= H$ Fuß. Die in jeder Secunde abfließende Wasser-Menge sei $= M$ Cubic-Fuß.

Man soll eine Gleichung zwischen b, h, l, H und M darstellen. *(Fig. 56.)*

Auflösung.

Für irgend eine Entfernung x vom Querschnitt bh, sei die Tiefe $= y = \varphi x$ und die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt $b\varphi x$ gleich $c = fx$. Für die Entfernung $x + k$ ist dann die Tiefe $= \varphi(x + k)$ und die mittlere Geschwindigkeit $= f(x + k)$. Wäre nun auf die Länge k die Durchschnittslinie nm des Wasserspiegels mit der durch k gelegten Vertical-Ebene als eine gerade Linie zu betrachten, so wäre der Sinus des Neigungswinkels gegen den Horizont, also

$$\frac{\alpha}{\lambda} \text{ durch } \frac{\varphi(x+k) - \varphi x}{k}$$

auszudrücken (eigentlich ist $\frac{\varphi(x+k) - \varphi x}{k}$ die Tangente, aber bei so kleinen Winkeln sind Sinus und Tangente als gleich groß anzusehen); da nun aber nm eine krumme Linie sein kann und wird, so muß zwischen n und m, etwa in t eine Stelle existiren, für welche $\frac{\varphi(x+k) - \varphi x}{k}$ oder $\varphi' x + \frac{k}{2}\varphi'' x + \ldots$ den Werth, des dieser Stelle zugehörigen Quotienten $\frac{\alpha}{\lambda}$ ausdrückt. Ist nun k' die horizontale Projection von mt, so gehört zum Endpunkt von $x + k'$ die Tiefe $\varphi(x + k')$ und die mittlere Geschwindigkeit $f(x + k')$. Nach der Formel

$$c = 90 . \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} . \frac{a}{p}}$$

hat man also hier

$$f(x+k') = 90 . \sqrt{(\varphi' x + \frac{k}{2}\varphi'' x + \ldots) . \frac{b\varphi(x+k')}{b + 2\varphi(x+k')}}$$

und aus dieser Gleichung folgt, für $k = o$ also auch $k' = o$;

$$c = fx = 90 . \sqrt{\varphi' x . \frac{b \varphi x}{b + 2 \varphi x}} .$$

Es ist aber $c . b \varphi x = M$; also

$$M = 90 . b . \varphi x . \sqrt{\varphi' x . \frac{b \varphi x}{b + 2 \varphi x}}$$

und hieraus

$$\frac{M^2}{90^2 . b^3} = \frac{\varphi x^3 . \varphi' x}{b + 2 \varphi x} ;$$

also, wenn man integrirt

$$\frac{M^2}{90^2 b^3} . x = \int \frac{\varphi x^3 . \varphi' x}{b + 2 \varphi x} .$$

Ob nun gleich dieß Integral leicht vollkommen bestimmter ist (siehe den Zusatz §. 190) so ist doch die entstehende Formel von unbequemen Gebrauch, und da der Nenner $b + 2 \varphi x$ gegen den Zähler $\varphi x^3 . \varphi' x$ nur wenig veränderlich ist, so setze man für den, den benetzten Umfang ausdrückenden Nenner, den mittleren Umfang, nemlich

$$\frac{b + 2h + b + 2H}{2} = b + h + H,$$

so ergiebt sich leicht

$$\frac{M^2 (b + h + H)}{90^2 . b^3} x = \int \varphi x^3 . \varphi' x$$

$$= \frac{(\varphi x)^4}{4} + C.$$

Für $x = o$; wird $\varphi x = h$; also

$$\text{Const} = -\frac{h^4}{4} ; \text{ folglich}$$

$$\frac{M^2(b+h+H)x}{90^2 \cdot b^3} = \frac{y^4-h^4}{4}$$

und hieraus für $x = l$;

$$\frac{M^2(b+h+H) \cdot l}{90^2 \cdot b^3} = \frac{H^4-h^4}{4}.$$

§. 190.

Zusatz.

Um das Integral $\int \frac{\varphi x^3 \varphi' x}{b+2\varphi x} = R$ vollkommen darzustellen, so setze man $Fx = b + 2\varphi x$; dann entsteht

$$R = \int \frac{\left(\frac{Fx-b}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} F'x}{Fx}$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(Fx^2 - 3b\,Fx + 3b^2 - \frac{b^3}{Fx}\right) F'x$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(\tfrac{1}{3} Fx^3 - \tfrac{3}{2} b\,Fx^2 + 3b^2\,Fx - b^3 \ln Fx\right) + C$$

$$= \frac{1}{96}\left[11 b^3 + 12 b^2 y - 12 b y^2 + 16 y^3 - 6 b^3 \ln (b+2y)\right] + C$$

also

$$\frac{M^2}{90^2\, b^3} \cdot x = \frac{1}{96}\left[11 b^3 + 12 b^2 y - 12 b y^2 + 16 y^3 - 6 b^3 \ln (b+2y)\right] + C$$

und

$$C = -\frac{1}{96}\left[11 b^3 + 12 b^2 h - 12 b h^2 + 16 h^3 - 6 b^3 \ln (b+2h)\right]$$

folglich, für $x = l$;

$$\frac{8 M^2 l}{90 \cdot 15 \cdot b^3} = 6b^2(H-h) - 6b(H^2-h^2) + 8(H^3-h^3) - 3b^3 \ln \frac{b+2H}{b+2h}.$$

Um beide Gleichungen zu vergleichen, sei $b = 10'$; $l = 1000'$; $h = 4'$; $H = 5'$; so erhält man aus dieser

$$M = 197{,}8 \text{ Cubic-Fuß};$$

aus der §. 189 aber

$$M = 198{,}3 \text{ Cubic-Fuß}.$$

§. 191.

Aufgabe.

Bei einer Röhrenleitung von der Länge l sei der Durchmesser im Lichten $= d$; die gesammte Druckhöhe, d. h. die lothrechte Entfernung vom unveränderlichen Wasserspiegel bis zum Mittelpunkt der Geschwindigkeit der Ausfluß-Oeffnung $= h$; die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung $= c$; die, in jeder Secunde abfließende Wasser-Menge $= M$; man soll c und M durch d, h, l bestimmen, vorausgesetzt, daß man für eine andere Röhrenleitung in Beziehung auf welche d'; h'; l'; c'; M' dieselben Größen bezeichnen, die Werthe von d'; h'; l' gemessen; M' aber durch einen Versuch bestimmt hat.

Auflösung.

Man betrachte h als aus 2 Theilen β; δ bestehend, von welchen der erste β auf Erzeugung und Erhaltung der Geschwindigkeit c; der andere δ aber, auf Ueberwindung der Hindernisse längst den Röhren-Wänden verwendet wird. Eben dieselbe Bedeutung sollen β'; δ' in Beziehung auf h' haben. Es ergeben sich dann die Gleichungen

$$c = \alpha\sqrt{\beta} \text{ und } c' = \alpha\sqrt{\beta'} \text{ §. 160,}$$

ferner

$$\beta + \delta = h; \; \beta' + \delta' = h'.$$

In Beziehung auf das Verhältniß von δ zu δ' erhält man durch ähnliche Schlüsse wie die in §. 175

$$\delta : \delta' = \left\{ \begin{matrix} d\pi : d'\pi \\ \frac{1}{\frac{1}{4}d^2\pi} : \frac{1}{\frac{1}{4}d'^2.\pi} \\ c' : c'^2 \\ l : l' \end{matrix} \right\}; \text{ also}$$

$$\delta : \delta' = \frac{c^2.l}{d} : \frac{c'^2.l'}{d'} \text{ folglich}$$

$$\delta = \frac{\delta'.d'}{c'^2.l'} \cdot \frac{c^2.l}{d}.$$

Es ist aber $M' = \frac{1}{4}d'^2\pi.c'$; folglich

$$c' = \frac{4M'}{d'^2\pi}; \text{ daher}$$

$$\frac{4M'}{d'^2\pi} = \alpha.\sqrt{\beta'} \text{ und hieraus}$$

$$\beta' = \left(\frac{4M'}{\alpha d'^2\pi}\right)^2;$$

also, aus $\beta' + \delta' = h'$;

$$\delta' = h' - \left(\frac{4M'}{\alpha d'^2\pi}\right)^2.$$

Setzt man nun diese Werthe für c' und δ' in die Formel

$$\delta = \frac{\delta'.d'}{c'^2.l'} \cdot \frac{c^2.l}{d};$$

so entsteht

$$\delta = \frac{h' - \left(\frac{4M'}{\alpha d'^2 \pi}\right)^2}{\left(\frac{4M'}{d'^2 \pi}\right)^2} \cdot \frac{d'}{l'} \cdot \frac{c^2 . l}{d}$$

und da nun, der Voraussetzung nach, d'; h'; l'; M' bekannte Zahlen sind; α aber, als der hiehergehörige Contractions-Coefficient ebenfalls eine, schon als gefunden anzusehende Zahl ausdrückt, so ist auch der Faktor

$$\frac{h' - \left(\frac{4M'}{\alpha d'^2 . \pi}\right)^2}{\left(\frac{4M'}{d'^2 \pi}\right)^2} \cdot \frac{d'}{l'}$$

eine Zahlen-Größe und soll durch n ausgedrückt werden.

Man hat demnach

1) $c = \alpha \sqrt{\beta}$

2) $\beta + \delta = h$

3) $\delta = n . \frac{c^2 l}{d}$

oder, wenn man die Werthe für β und δ aus 1, und 3, entnimmt, und in 2, setzt

$$\frac{c^2}{\alpha^2} + \frac{n l c^2}{d} = h;$$

und hieraus

$$c = \alpha . \sqrt{\frac{dh}{\alpha^2 n l + d}}$$

folglich $M = \frac{1}{4} d^2 \pi . c$ oder

$$M = \frac{1}{4} \pi . \alpha . d^2 . \sqrt{\frac{dh}{\alpha^2 n l + d}} .$$

§. 192.

Zusatz.

Beziehen sich alle Abmessungen auf rheinländisches Fuß-Maaß, so ist nach Eytelwein $\alpha = 6{,}42$; und nach du Buat, als Mittelwerth von 51 verschiedenen Versuchen $n = \frac{1}{2006}$; also

I. die Widerstandshöhe

$$\delta = \frac{c^2 \,.\, l}{2006 \,.\, d}$$

ferner die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 6{,}42 \,.\, \sqrt{\frac{dh}{\frac{6{,}42^2}{2006} l + d}}$$

oder, weil $\frac{6{,}42^2}{2006}$ nahe $= \frac{1}{50}$ ist

$$\text{II.} \quad c = 6{,}42 \,.\, \sqrt{\frac{50\,dh}{l + 50\,d}}.$$

Endlich, da $\frac{1}{4}\pi \,.\, 6{,}42$ nur wenig über 5 ist,

$$\text{III.} \quad M = 5 d^2 \,.\, \sqrt{\frac{50\,dh}{l + 50\,d}}.$$

§. 193.

Zusatz.

Für die Fälle, wo l bedeutend groß ist, wird $50 \,.\, d$ als Summand von l von sehr geringen Einfluß, so daß man l für $l + 50\,d$ setzen kann, dann entsteht beinahe

$$c = 45 \,.\, \sqrt{\frac{dh}{l}}$$

$$M = 35 d^2 \,.\, \sqrt{\frac{d}{l}}.$$

§. 194.

Zusatz.

Hat die Röhrenleitung Krümmungen, und bezeichnet S die Summe von den Quadraten der Sinusse sämmtlicher Anprallungswinkel, so ist nach du Buats Versuchen

$$\delta = \frac{c^2 l}{2006 . d} + 0{,}00387 . S . c^2.$$

Der Einfluß des zweiten Gliedes ist aber, wenn nur wenige Krümmungen unter nicht zu kleinen Winkeln vorkommen, sehr unbedeutend. Ist z. B. nur eine Krümmung da, der Winkel den die centrischen Linien der Röhrenleitung bilden $= 120°$; also der Anprallungs, so wie der Abprallungswinkel $= 30°$; übrigens $l = 400$; $d = \frac{1}{2}$ Fuß, so hat man, ohne Rücksicht auf den vermehrten Widerstand durch die Krümmung

$$\delta = \frac{l}{2006 . d} . c^2 = \frac{400}{2006 . \frac{1}{2}} . c^2 = 0{,}3988 . c^2$$

und mit Rücksicht auf denselben

$$\delta = \frac{l}{2006\, d} . c^2 + 0{,}00387 . (\text{Sin}\, 30°)^2 . c^2$$

$$= (0{,}3988 + 0{,}00097)\, c^2$$

$$= 0{,}39977 . c^2.$$

§. 195.

Zusatz.

Diejenige Gleichung, welche du Buat höchst mühsam seinen Versuchen angepaßt hat, und welche mit allen bisherigen Erfahrungen ungemein gut übereinstimmen soll, ist folgende:

$$c = \frac{297 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{d} - 0{,}1)}{\sqrt{\frac{1}{h - \frac{c^2}{478}}} - \log n \sqrt{\frac{1}{h - \frac{c^2}{478}}} + 1{,}6} - 0{,}3(\tfrac{1}{2}\sqrt{d} - 0{,}1)$$

In ihr beziehen sich alle Abmessungen auf pariser Zolle; der Werth von c kann aber aus ihr nur durch Probiren gefunden werden.

Es ist Schade, daß die große Mühe, auf die Auffindung einer Gleichung, und nicht auf die Auffindung einer Formeln für c verwendet worden ist.

§. 196.

Aufgabe.

Mit einem Wasser-Behälter, in welchem das Wasser immer auf gleicher Höhe erhalten wird, sind n communicirende Röhren verbunden. Man soll, durch die gesammte Druckhöhe h und die Abmessungen der Röhren und Oeffnungen, die mittlere Geschwindigkeit c in der letzten Oeffnung a und die in jeder Secunde abfließende Wasser-Menge M bestimmen.

Auflösung.

Es bezeichnen

$$L; L'; L''; \ldots\ldots L^n$$

die Längen der Röhrenleitungen von der Ausmündung a herein abgezählt. *Fig.* 57;

$$A; A'; A''; \ldots\ldots A^n$$

die Anzahl Quadrat-Fuße der Querschnitte derselben im Lichten;

$$D; D'; D''; \ldots\ldots D^n$$

die Durchmesser derselben;

$a; a'; a''; \ldots\ldots a^{n+1}$

die Querschnitte der Verbindungs-Oeffnungen; so sind die Geschwindigkeiten des Wassers in $a; a'; \ldots\ldots a^{n+1};$

$$= \frac{M}{a}; \frac{M}{a'}; \ldots\ldots \frac{M}{a^{n+1}};$$

und die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen

$$\left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2; \left(\frac{M}{\alpha a'}\right)^2; \ldots\ldots \left(\frac{M}{\alpha a^{n+}}\right)^2.$$

Ferner die Geschwindigkeiten des Wassers in den Röhren von den Querschnitten $A; A'; \ldots\ldots A^n;$

$$= \frac{M}{A}; \frac{M}{A'}; \ldots\ldots \frac{M}{A^n};$$

die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen

$$= \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A}\right)^2; \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A'}\right)^2 \ldots\ldots \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A^n}\right)^2$$

die Widerstandshöhen aber, nach §. 192;

$$= \frac{L}{2006D} \cdot \left(\frac{M}{A}\right)^2; \frac{L'}{2006D'}\left(\frac{M}{A'}\right)^2 \ldots \frac{L^n}{2006D^n}\left(\frac{M}{A^n}\right)^2.$$

In Beziehung auf die letzte Röhre von der Länge L kommt nun das Wasser mit einer Geschwindigkeit $\frac{M}{A}$ die der Höhe $\frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A}\right)^2$ zugehört, vor der Oeffnung a an, in welcher die Geschwindigkeit $\frac{M}{a}$ hervorgebracht werden muß, deren Höhe $= \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2$ ist, so daß also auf Her-

vorbringung dieser Geschwindigkeit $\frac{M}{a}$ ein Theil von h, der $= \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2 - \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A}\right)^2$ ist verwendet werden muß. Rechnet man hierzu die Widerstandshöhe, so ist für die letzte Röhre von der Länge L, eine Druckhöhe

$$= \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2 - \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A}\right)^2 + \frac{L}{2006 D}\left(\frac{M}{A}\right)^2$$

für die vorhergehende von der Länge L', um in a' die Geschwindigkeit $\frac{M}{a'}$ zu erzeugen, eben so, die

$$\left(\frac{M}{\alpha a'}\right)^2 - \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A'}\right)^2 + \frac{L'}{2006 D'} \cdot \left(\frac{M}{A'}\right)^2$$

u. s. w.

und für die letzte von der Länge L^n, um in a^n die Geschwindigkeit $\frac{M}{a^n}$ hervorzubringen, eine Druckhöhe

$$= \left(\frac{M}{\alpha a^n}\right)^2 - \frac{1}{4g} \cdot \left(\frac{M}{A^n}\right)^2 + \frac{L^n}{2006 D^n}\left(\frac{M}{A^n}\right)^2$$

erforderlich. Hierzu nach die Geschwindigkeitshöhe gerechnet, welche nöthig ist, die Geschwindigkeit $\frac{M}{a^{n+1}}$ in der Oeffnung zu erzeugen, die das Gefäß mit der Röhrenleitung verbindet, und welche Höhe mit Rücksicht auf die Contraction

$$= \left(\frac{M}{\alpha a^{n+1}}\right)^2$$

ist, so entsteht die Gleichung

$$h = \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2 - \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A}\right)^2 + \frac{L}{2006 D}\left(\frac{M}{A}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{M}{\alpha a'}\right)^2 - \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A'}\right)^2 + \frac{L'}{2006 D'}\left(\frac{M}{A'}\right)^2$$

+ u. s. w. u. s. w.

$$+ \left(\frac{M}{\alpha a^n}\right)^2 - \frac{1}{4g}\left(\frac{M}{A^n}\right)^2 + \frac{L^n}{2006 D^n} \cdot \left(\frac{M}{A^n}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{M}{\alpha a^{n+1}}\right)^2; \text{ oder}$$

$$h = \frac{M^2}{a^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a}{a^{n+1}}\right)^2\right] \\ - \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a}{A^n}\right)^2\right] \\ + \frac{1}{2006}\left[\frac{L}{D}\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \frac{L'}{D'}\left(\frac{a}{A'}\right)^2 + \ldots + \frac{L^n}{D^n}\left(\frac{a}{A^n}\right)^2\right] \end{array} \right\}.$$

Bezeichnet man nun, der Kürze wegen

$$\frac{1}{\alpha^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{a}{a^{n+1}}\right)^2\right] \text{ mit } E;$$

$$\frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{a}{A^n}\right)^2\right] \text{ mit } F;$$

$$\frac{1}{2006}\left[\frac{L}{D}\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \frac{L'}{D'}\left(\frac{a}{A'}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{L^n}{D^n}\left(\frac{a}{A^n}\right)^2\right]$$

mit G;

so hat man

$$h = \frac{M^2}{a^2}(E - F + G)$$

und hieraus

$$\text{I. } M = \frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{E - F + G}};$$

ferner, weil $c = \frac{M}{a}$ ist

$$\text{II. } c = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{E - F + G}}.$$

§. 197.

Zusatz.

Ist am Ende einer Röhrenleitung eine horizontale Oeffnung, aus welcher das Wasser, vermöge der gesammten Druckhöhe h, lothrecht in die Höhe steigt, so ergiebt sich, wenn c die nach dem vorigen §. zu bestimmende Geschwindigkeit des Wassers in dieser Oeffnung bezeichnet, die zugehörige lothrechte Höhe des ausströhmenden Wasserstrahls, oder

$$z = \frac{c^2}{4g}.$$

Mariotte hat aus seinen Versuchen, für Springbrunnen die Formel entnommen

$$h = z + \frac{z^2}{300}$$

nach welcher sich die Höhe z des springenden Strahls sehr leicht berechnen läßt. Es ergiebt sich

$$z = -150 + \sqrt{150^2 + 300h},$$

sowohl h als z in Fußen verstanden. Die Resultate dieser praktischen Mariottischen Formel sollen den Erfahrungen hinreichend entsprechen.

§. 198.

Nach Eytelwein's Angaben ist der Contractions-Coefficient α

für Mündungen von der Gestalt des ausfließenden Wasserstrahls . . . . . . 7,646.

für breite Gerinne, Freischleußen mit Flügelwänden, schräge Einbaue, spitze Brückenpfeiler . . . . 7,54.

für schmale Gerinne, Schutz-Oeffnungen mit Flügelwänden, steile Einbaue, grade Brückenpfeiler . . . . 6,76.

für kurze Ansatzröhren . . . . 6,42.

für Schutz-Oeffnungen ohne Flügelwände . 5.

für Oeffnungen in dünnen Wänden . 4,89.

Aufgaben

zur Anwendung der Formeln dieses ersten Kapitels.

§. 199.

Aufgabe.

Im horizontalen Boden eines 9 Fuß hoch mit Wasser voll erhaltenen Gefäßes befindet sich eine kreisförmige Oeffnung, aus welcher in einer Stunde 9000 Cubic-Fuß Wasser flossen. Wie groß ist der Halbmesser x dieser Oeffnung?

Auflösung.

In Beziehung auf die Formel

$$M = \alpha a. \sqrt{h} \quad §. 161,$$

hat

hat man hier

$$M = \frac{9000}{60.60} = \frac{5}{2}$$

$$h = 9$$

$$a = x^2 \pi.$$

Ferner sei $\alpha = 6{,}42$; so ist

$$\tfrac{5}{2} = 6{,}42 . x^2 \pi . 3;$$

und hieraus

$$x = 2'' \, 5\tfrac{1}{4}'''.$$

§. 200.

Aufgabe.

An einem See befindet sich ein Ueberfall von 20′ Breite über welchen das Wasser 4′ hoch abfließt; man soll diesen Ueberfall um so viel breiter machen, daß das Wasser nur 3′ hoch über dem Fachbaum abfließt.

Auflösung.

Der erforderliche Zuwachs an Breite sei $= x$, so hat man nach §. 165. III.

$$\tfrac{2}{3} . \alpha . (20 + x) \, 3 . \sqrt{3} = \tfrac{2}{3} \alpha . 20 . 4 . \sqrt{4}$$

und hieraus

$$x = 20 . (\tfrac{8}{9} \sqrt{3} - 1) = 10{,}8.$$

§. 201.

Aufgabe.

An einem See befindet sich ein Ueberfall von 40′ Breite, über welchen das Wasser $2\frac{1}{2}'$ hoch abfließt; man will diesem Ueberfall 12′ Breite nehmen; wie hoch wird dann das Wasser abfließen?

Auflösung.

Die gesuchte Höhe sei $= x$, so ist die Gleichung

$$\tfrac{2}{3}\alpha . 28 . x\sqrt{x} = \tfrac{2}{3}\alpha . 40 . \tfrac{5}{2} . \sqrt{\tfrac{5}{2}}$$

und hieraus

$$x = \sqrt[3]{\frac{25000}{28^2}} = 3{,}17 = 3' \, 2''.$$

§. 202.

Aufgabe.

Aus einer lothrechten Schutz-Oeffnung von 4′ Breite, sollen bei 5′ Wasserstand, in jeder Secunde 60 Cubic-Fuß Wasser ausfließen, wie hoch muß die Oeffnung sein?

Auflösung.

Bezeichnet x die gesuchte Höhe, so hat man nach §. 165. II, hier

$$M = 60; \; b = 4; \; \alpha = 5;$$

$$e + h = 5; \; e = 5 - x; \text{ also}$$

$$60 = \tfrac{2}{3} . 5 . 4 . [5 . \sqrt{5} - (5 - x)^{\frac{3}{2}}]$$

und hieraus

$$x = 5 - \sqrt[3]{(5\sqrt{5} - \tfrac{9}{2})^2} = 1{,}46.$$

§. 203.

Aufgabe.

In einer schrägen Seitenwand, welche mit der Horizontal-Ebene einen Winkel von 54° bildet, befindet sich eine rechtwinklichte Seiten-Oeffnung,

deren horizontale Breite $= 5'$ und deren Höhe $= 9''$ ist; die Entfernung der Unterkante der Oeffnung vom Wasserspiegel, in der Ebene der Oeffnung gemessen, sei $= 4'$; wenn nun diese Ebene der verticalen Lage näher gebracht wird, so daß ihr Winkel mit der Horizontal-Ebene $= 70°$ wird; die Entfernung der horizontalen tiefsten Kante der Oeffnung vom Wasserspiegel aber dieselbe bleibt, wie hoch x muß dann die Schutz-Oeffnung sein, damit $\frac{1}{3}$ Wasser mehr abfließt, als vorher?

Auflösung.

Nach §. 165. I, ist die Wasser-Menge welche in der ersten Lage abfließt, oder

$$m = \tfrac{2}{3}\alpha . 5 \sqrt{\operatorname{Cos} 36°}\,[4^{\frac{3}{2}} - (\tfrac{10}{3})^{\frac{3}{2}}];$$

die aber, welche in der zweiten Lage abfließt, oder

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha . 5 \sqrt{\operatorname{Cos} 20°}.\,[4^{\frac{3}{2}} - (4-x)^{\frac{3}{2}}].$$

Der Bedingung nach, soll aber

$$M = m + \tfrac{1}{3}m$$

sein, und dies giebt die Gleichung

$$\sqrt{\operatorname{Cos} 20°}\,[8-(4-x)^{\frac{3}{2}}] = \tfrac{4}{3}\sqrt{\operatorname{Cos} 36.}\,[8 - \tfrac{10}{9}\sqrt{30}]$$

aus welcher sich

$$x = 4 - \left[8 - \tfrac{4}{3}\left(8 - \frac{10\sqrt{30}}{9}\right)\sqrt{\frac{\operatorname{Cos} 36}{\operatorname{Cos} 20}}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$= 0{,}8346$ Fuß $= 10\frac{1}{6}$ Zoll ergiebt.

§. 204.

Aufgabe.

In einer verticalen Seitenwand, befindet sich eine Oeffnung, welche ein rechtwinklichtes Dreieck

bildet, dessen Hypotenuse in verticaler Lage ist; die Hypotenuse sei $= 13''$; die dem Wasserspiegel am nächsten liegende Cathete $= 12''$; die andere also $= 5''$; die Entfernung der höchsten Ecke des Dreiecks vom unveränderlichen Wasserspiegel $= 15''$; man soll die in der Secunde ausfließende Wasser-Menge M bestimmen.

Auflösung.

In *Fig.* 58 sei AB der Wasserspiegel, DEF die Oeffnung; $DE = 13''$; $DF = 12''$; $EF = 5''$; $CD = 15''$; man fälle die horizontale Normale FG, so ist

$$DG : 12 = 12 : 13; \text{ also}$$
$$DG = \tfrac{144}{13}''; \text{ ferner}$$
$$GE = \tfrac{25}{13}''; \text{ und } GF = \tfrac{60}{13}'';$$

daher, nach §. 165. IV. in Beziehung, aus das $\triangle DGF$;

$$e = \tfrac{5}{4}'; \; h = \tfrac{12}{13}'; \; b = \tfrac{5}{13}';$$

folglich, $\alpha = 5$ gesetzt, die Wasser-Menge welche durch DGF abfließt

$$= \frac{2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{13}}{15 \cdot \frac{12}{13}} \left[\left(3 \cdot \tfrac{12}{13} - 2 \cdot \tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{5}{4} + \tfrac{12}{13}\right)^{\frac{5}{2}} + 2 \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}}\right]$$
$$= \tfrac{5}{18} \cdot \left[\tfrac{7}{26}\left(\tfrac{113}{52}\right)^{\frac{5}{2}} + 2 \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}}\right] = 1{,}21.$$

Ferner, in Beziehung auf das Dreieck GFE nach §. 165. VI;

$$e = \tfrac{113}{52}; \; h = \tfrac{25}{12 \cdot 13}; \; b = \tfrac{5}{13};$$

folglich die Wasser-Menge, welche durch GFE abfließt

$$= \tfrac{8}{5}\left[2 \cdot \left(\tfrac{364}{156}\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{803}{156}\left(\tfrac{113}{52}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$= 0{,}23; \text{ daher}$$
$$M = 1{,}44.$$

§. 205.

Aufgabe.

In der verticalen Seitenwand eines Gefäßes befindet sich eine kreisförmige Oeffnung von 2 Fuß Durchmesser, welche bis an den unveränderlichen Wasserspiegel reicht; die in der Secunde ausfließende Wasser-Menge M zu berechnen.

Auflösung.

Nach §. 165. VII ist, $\alpha = 5$ angenommen,

$$M = \tfrac{32}{15} \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = 15{,}083.$$

Nimmt man näherungsweise den Schwerpunkt der Oeffnung als Mittelpunkt der Geschwindigkeit an, so entsteht

$$M = \alpha \cdot r^2 \pi \cdot \sqrt{r} = 5 \cdot 3{,}14 = 15{,}7.$$

§. 206.

Aufgabe.

In Beziehung auf §. 166; sei

$h = 9'$; $a = 6Q''$; $a' = 3Q''$; $a'' = 2Q''$;

man soll M berechnen.

Auflösung.

Sind die Oeffnungen in dünnen Wänden, so ist $\alpha = 4{,}89$; also

$$M = \frac{4{,}89 \cdot \frac{6}{144} \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{1 + 2^2 + 3^2}}$$

$$= 0{,}163 \text{ Cubic-Fuß.}$$

§. 207.

Aufgabe.

In einem Fluß von 40′ mittlerer Breite und 5′ mittlerer Tiefe, der auf 100 Ruthen 3″ Gefälle hat, soll durch einen ebenfalls 40′ breiten Ueberfall, der Wasserspiegel um 3′ erhöht werden. Man soll die Höhe des anzulegenden Ueberfalls bestimmen.

Auflösung.

Nach §. 178 ist die Wasser-Menge M, welche der Fluß in der Secunde abführt

$$= \frac{3}{4} . 40 . 5 . \sqrt{3 . \frac{40 . 5}{40 + 2 . 5}} = 150 . \sqrt{12}$$

$$= \text{beinahe } 520 \text{ Cubic-Fuß.}$$

Um nun zu beurtheilen, ob ein vollkommener oder unvollkommener Ueberfall erforderlich ist, so berechne man die Wasser-Menge, welche dann abfließen könnte, wenn der Ueberfall gerade bis an den ursprünglichen Wasserspiegel reichte. Diese ist, ohne Rücksicht auf die schon vorhandene Geschwindigkeit $= \frac{2}{3}\alpha . 40 . 3 . \sqrt{3}$ und, weil α hier $= 6{,}76$ zu setzen ist, so hat man diese Wasser-Menge

$$= \frac{2}{3} . \frac{27}{4} . 40 . 3 . \sqrt{3} = 935{,}28 \text{ Cubic-Fuß.}$$

Da nun diese Wasser-Menge schon bedeutend größer ist, als die wirklich vorhandene, obgleich die schon vorhandene Geschwindigkeit unberücksichtigt geblieben ist, so muß dem abfließenden Wasser ein kleinerer Querschnitt, also da die Breite bestimmt ist, eine geringere Höhe, gegeben werden, d. h. man muß einen vollkommenen Ueberfall anlegen. In

Beziehung auf diesen hat man nun, nach §. 169; und 171

$B = b = 40'$; $M = 520$; $h = 5'$; $e = 3'$;

also nach §. 171

$$H^3 + \frac{9 \cdot 520^2}{16 \cdot \frac{125}{8} \cdot 40^2 \cdot 8^2} \cdot H^2 - \left(\frac{3 \cdot 520}{2 \cdot \frac{27}{4} \cdot 40}\right)^2 = 0$$

oder

$$H^3 + 0{,}0950625\, H^2 - 8{,}345677 = 0$$

woraus, hinreichend genau,

$H = 2$ Fuß sich ergiebt.

Die Höhe k des Ueberfalls ist also

$= 5 + 3 - 2 = 6$ Fuß.

§. 208.

Aufgabe.

In einem Fluß von 100 Fuß mittlerer Breite und 6 Fuß mittlerer Tiefe, ist durch einen, ebenfalls 100 Fuß breiten Ueberfall, von 5 Fuß Höhe der Wasserspiegel um 2 Fuß erhöhet worden; wie groß ist die Wasser-Menge M welche der Fluß in jeder Secunde abführt?

Auflösung.

Nach §. 172 ist hier

$B = b = 100$; $h = 6$; $k = 5$; $H = 2$; $\alpha = 6\frac{3}{4}$;

folglich

$$M = \frac{27}{4} \cdot 100 \left(2 \cdot \sqrt{\frac{8}{9} + \frac{M^2}{125 \cdot 100^2 \cdot 32}} + 1 \cdot \sqrt{2 + \frac{M^2}{125 \cdot 100^2 \cdot 32}}\right)$$

und hieraus

$$M^2 = 2825555 \pm 2723528.$$

Nach der Näherungs-Formel §. 174 ist aber

$$M = \frac{27}{4} \cdot 100 \left(\frac{4}{3}+1\right) \cdot \sqrt{2}$$
$$= 2227 \text{ Cubic-Fuß;}$$

und aus diesem Resultat ersieht man, daß in der genauen Formel das Zeichen + genommen werden muß. Man hat also

$$M = \sqrt{5549083} = 2356 \text{ Cubic-Fuß.}$$

§. 209.

Aufgabe.

Es soll ein Fluß, dessen gewöhnlicher Wasserspiegel bd (*Fig. 59*) ist, welcher aber bei Aufschwellungen bis fg steigt, eingedeicht werden. Man sucht eine Gleichung zwischen der mittleren Entfernung nm = y beider Deiche; der mittleren Tiefe x mit welcher das Wasser zwischen den Deichen abfließen kann, dem Querschnitt a zum Wasserspiegel fg und dem zugehörigen benetzten Umfang p, der Bedingung gemäß, daß zwischen den Deichen die Wasser-Menge abfließen kann, welche bei der höchsten Anschwellung bis fg abgeführt wurde.

Auflösung.

Es bezeichne c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitt a; v die im Querschnitt xy, so hat man der Bedingung gemäß

$$1)\quad xy \cdot v = a \cdot c$$

und nach §. 179

$$2)\quad v : c = \sqrt{\frac{xy}{2x+y}} : \sqrt{\frac{a}{p}}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$p . x^3 . y^3 = a^3 . (2x + y).$$

Ist z. B. $x = 20'$; $a = 12000\,Q'$; $p = 3000\,Q'$, gegeben, so erhält man, hinreichend genau,

$$y = 285 \text{ Fuß}.$$

§. 210.

Aufgabe.

Bei 4″ Gefälle auf 100 Ruthen, sollen in einem Canal 100 Cubic-Fuß Wasser in der Secunde abgeführt werden. Die vortheilhaftesten Abmessungen desselben zu bestimmen.

Auflösung.

1) Setzt man die Tiefe $= x$, so hat man nach §. 180 und 181

$$100 = \tfrac{3}{2} . x^2 . \sqrt{4 . \frac{x}{2}}$$

und hieraus

$$x = \sqrt[5]{\frac{20000}{9}} = 4{,}67 \text{ Fuß},$$

also entweder die Grundbreite $= 9{,}34$ und die Höhe des rechtwinklichten Profils $= 4{,}67$; oder die Grundbreite des symmetrisch dossirten Profils $= \frac{2}{3} . 4{,}67 = 3{,}11$; die Tiefe $= 4{,}67$ und die Ausladung $= 6{,}22$ Fuß.

2) Nach §. 186 hat man für das beste dossirte Profil, d. h. für das halbe reguläre Sechseck, wenn x die Tiefe bezeichnet

$$100 = \tfrac{3}{4} x^2 . \sqrt{4 . \frac{3x}{2}}$$

und hieraus

$$x = \sqrt[6]{\frac{400^2}{6.9}} = 4{,}947$$

also die Grundbreite

$$= \frac{2.4{,}947}{\sqrt{3}} = 5{,}712.$$

§. 211.

Aufgabe.

Es soll in einem symmetrisch dossirten Canal von 40 Q′ Inhalt und 10′ Grundbreite, bei 4″ Gefälle, die größtmöglichste Menge Wasser abgeführt werden. Die vortheilhafteste erforderliche Tiefe = x und die Ausladung y zu bestimmen.

Auflösung.

Nach §. 182 ist hier:

$$x^4 + 400x - 1600 = 0$$

und hieraus ziemlich genau

$$x = 3{,}6; \text{ dann}$$

$$y = \frac{40 - 36}{3{,}6} = 1\tfrac{1}{9} \text{ Fuß;}$$

folglich

$$M = 90{,}6.$$

§. 212.

Aufgabe.

In ein rechtwinklichtes Gerinne mit horizontalen Boden, von 10′ Breite, ergießt sich das Wasser aus einem See, vermittelst eines Ueberfalls, mit 4 Fuß Höhe. Welches ist die Wassertiefe h in einer Entfernung von 100 Fuß?

Auflösung.

Nach §. 189 ist hier $H = 4'$; $b = 10'$;

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha . bH . \sqrt{H} = \tfrac{2}{3} . \tfrac{27}{4} . 10 . 4 . \sqrt{4}$$

$= 360$ Cubic-Fuß; $l = 100$ Fuß;

folglich

$$\frac{360^2 . (10 + 4 + h) . 100}{90^2 . 10^3} = \frac{4^4 - h^4}{4}$$

und hieraus

$$h^4 + 6{,}4h - 166{,}4 = 0.$$

Dieser Gleichung entspricht hinreichend genau

$$h = 3{,}47 \text{ Fuß} = 3'\ 5\tfrac{2}{3}''.$$

§. 213.

Aufgabe.

Bei 6 Fuß Druckhöhe soll durch eine Röhrenleitung von 350 Fuß Länge eine Wasser-Menge von 1 Cubic-Fuß in der Secunde abgeführt werden. Den zugehörigen Durchmesser d der Röhrenleitung zu bestimmen.

Auflösung.

Nach §. 191 und 192 ist hier

$$M = 1;\ l = 350';\ h = 6';$$

also nach Formel III. §. 192

$$1 = 5 . d^2 . \sqrt{\frac{50 . 6 . d}{350 + 50d}}$$

und hieraus

$$150 . d^5 - d - 7 = 0$$

welcher Gleichung $d = 0{,}55$ Fuß $= 6\tfrac{1}{2}$ Zoll sehr genau entspricht.

Nach der weniger genauen Formel

$$M = 35 \cdot d^2 \cdot \sqrt{\frac{dh}{l}}$$

in §. 193 erhält man

$$d = \sqrt[5]{\tfrac{1}{21}} = 0{,}544.$$

Zweites Kapitel.

Von der Verengung der Querprofile eines Flußes, und dem Rückstau.

§. 214.

Aufgabe.

In einem Fluß, dessen mittlere Breite $= B$; mittlere Tiefe $= H$ und mittlere Geschwindigkeit $= c$ ist, wird durch einen Einbau die Breite bis auf b Fuße reducirt; die hierdurch bewirkte Erhöhung des Wasserspiegels sei $= h$; man soll eine Gleichung zwischen B, H, c, b, h darstellen.

Auflösung.

Die mittlere Geschwindigkeit im verengten Profil $b(H+h)$ sei $= v$; so ist die zugehörige Geschwindigkeitshöhe $= \frac{v^2}{\alpha^2}$; diese muß aber nothwendig gleich sein der Höhe $\frac{c^2}{4g}$, welche der schon vorhandenen Geschwindigkeit c zugehört, und der erst entstandenen h; man hat also

$$\frac{v^2}{\alpha^2} = \frac{c^2}{4g} + h,$$

Nun ist aber die Wasser-Menge sowohl

$= b(H + h)v$; als auch $= BHc$

und aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke entsteht

$$v = \frac{BHc}{b(H+h)}.$$

Substituirt man diesen Werth für v in die obige Gleichung, so erhält man

$$\left(\frac{BHc}{\alpha b(H+h)}\right)^2 = \frac{c^2}{4g} + h.$$

Beispiele.

1) Es sei $B = 400'$; $H = 3'$; $c = 4'$; $\alpha = 6{,}76$ oder hinreichend genau $= \frac{27}{4}$; $h = \frac{1}{2}$ Fuß; man soll b bestimmen.

Es ergiebt sich $b = 233$ Fuß. Der Einbau muß also 167 Fuß der Breite einnehmen.

2) Durch eine angelegte Buhne, welche beinahe senkrecht auf die Richtung des bewegten Wassers trift, ist ein 500 Fuß breiter Fluß, von $2\frac{3}{4}$ Fuß mittlerer Tiefe und 3 Fuß mittlerer Geschwindigkeit, auf 350 Fuß Breite eingeschränkt worden. Wie viel wird der Aufstau h betragen?

Hier ist

$B = 500$; $H = \frac{11}{4}$; $b = 350$; $c = 3'$; $\alpha = \frac{27}{4}$;

folglich

$$\left(\frac{500 \cdot \frac{11}{4} \cdot 3}{\frac{27}{4} \cdot 350 \cdot (\frac{11}{4} + h)}\right)^2 = \frac{9 \cdot 2}{125} + h$$

und hieraus

$$h^3 + 5{,}644\,h^2 + 8{,}3545\,h - 1{,}959625 = 0$$

welcher Gleichung

$$h = 0{,}205 \text{ Fuß} = 2'' \; 5\tfrac{1}{2}'''$$

sehr genau entspricht.

§. 215.

Zusatz.

Will man bei der Bestimmung von h eine cubische Gleichung vermeiden, so setze man im Nenner der Wurzel vorläufig h als unbedeutend bei Seite, so entsteht

$$\left(\frac{Bc}{\alpha b}\right)^2 = \frac{c^2}{4g} + h$$

und nun schreibe man den hieraus sich ergebenden Näherungswerth für h, nemlich

$$\left(\frac{Bc}{\alpha b}\right)^2 - \frac{c^2}{4g}$$

an die vorhin erwähnte Stelle, anstatt h, so erhält man

$$\left[\frac{BHc}{\alpha b\left[H + \left(\frac{Bc}{\alpha b}\right)^2 - \frac{c^2}{4g}\right]}\right]^2 - \frac{c^2}{4g} = h.$$

Im zweiten Beispiel zu §. 214 ist

$$\left(\frac{Bc}{\alpha b}\right)^2 - \frac{c^2}{4g} = 0{,}259$$

wofür man $0{,}25 = \frac{1}{4}$ setzen kann; dann entsteht

$$h = \left(\frac{50 \cdot 11 \cdot 3}{\frac{27}{4} \cdot 35 \cdot 12}\right)^2 - \tfrac{18}{125} = 0{,}194$$

$$= 2'' \; 4'''.$$

§. 216.

Aufgabe.

In einem Fluß wird durch einen Einbau oder Ueberfall der Wasserspiegel um die Höhe H erhöht; man soll die Größe des Rückstaues A, d. h man soll bestimmen wie weit sich rückwärts die Erhöhung des Wasserspiegels erstreckt.

Auflösung.

Bezeichnet, zu irgend einer Länge λ; α das Gefälle des ursprünglichen Wasserspiegels; β das, des Wasserspiegels an der Stelle des Einbaues oder des Ueberfalles, und bezeichnen die Buchstaben H'; A'; α'; β' ebenfalls, Erhöhung des Wasserspiegels, Rückstau, Gefälle des ursprünglichen und erhöhten Wasserspiegels auf die Länge λ', aber in Beziehung auf einen andern Fluß und in denselben erfolgten Einbau oder Ueberfall, so verhalten sich nach du Büats Versuchen die Weiten der Rückstaue direct wie die Stauhöhen H; H' und indirect wie die Unterschiede der Gefälle des ursprünglichen und des erhöhten Wasserspiegels, d. h. wie

$$\frac{\alpha'}{\lambda'} - \frac{\beta'}{\lambda'} \text{ zu } \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda}.$$

Die Zusammensetzung dieser Verhältnisse giebt

$$A : A' = H\,\frac{\alpha' - \beta'}{\lambda'} : H'.\,\frac{\alpha - \beta}{\lambda}$$

und hieraus ist

$$A = \frac{A'(\alpha' - \beta')}{H'.\,\lambda'} \cdot \frac{H.\,\lambda}{\alpha - \beta}.$$

Nach du Buat ist $\frac{A'(\alpha' - \beta')}{H'.\lambda'}$ im Mittel $= 1{,}9$ zu setzen, und folglich ist hiernach

$$A = 1{,}9.\frac{H.\lambda}{\alpha - \beta} \text{ oder}$$

$$A = 1{,}9.\frac{H}{\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda}}.$$

Der Werth von $\frac{\alpha}{\lambda}$ kann durch ein Nivellement bekannt sein, wo nicht, so ist derselbe, so wie in jeden Fall der von $\frac{\beta}{\lambda}$ aus der Formel II in §. 176 oder auch aus der II in §. 177 zu entwickeln.

Beispiele.

1) In einem Fluß von 400 Fuß mittlerer Breite und 5 Fuß mittlerer Tiefe, welcher auf 100 Ruthen 4 Zoll Gefälle hat, soll ein eben so breiter Ueberfall angelegt werden, durch welchen der Wasserspiegel um 3 Fuß erhöht wird. Man soll beurtheilen, wie weit der Rückstau sich dann erstreckt.

Hier ist $H = 3$ Fuß; $\alpha = 4''$; $\lambda = 100$ Ruthen; um den zugehörigen Werth von β zu erhalten hat man nach §. 178 II folgenden doppelten Ausdruck für die abfließende Wasser-Menge

$$\tfrac{3}{4}.400.5.\sqrt{4.\frac{400.5}{400+10}} = \tfrac{3}{4}.400.8.\sqrt{\beta.\frac{400.8}{400+16}}$$

und hieraus $\beta = \frac{325}{328}$ Zoll, wofür ein Zoll anzunehmen ist. Nach der Formel

$$A = 1{,}9.H.\frac{\lambda}{\alpha - \beta}$$

ist

ist also nun

$$A = 1{,}9 \cdot 3 \cdot \frac{14400}{4-1} = 27360 \text{ Fuß}$$

oder etwas über eine Meile.

2) In dem Beispiel §. 214. 1, die Größe des Rückstaues zu bestimmen.

Für $\lambda = 100°$; hat man nach §. 178 I. hier

$$4 = \tfrac{3}{4} \cdot \sqrt{\alpha \cdot \tfrac{1200}{406}}; \text{ folglich}$$

$$\alpha = 9{,}6237 \text{ Zoll.}$$

Da ferner $M = 1200 \cdot 4 = 4800$ ist, so folgt nach §. 178. II, für den Querschnitt dicht vor dem Einbau

$$4800 = \tfrac{3}{4} \cdot 400 \cdot \tfrac{7}{2} \cdot \sqrt{\beta \cdot \frac{400 \cdot \frac{7}{2}}{400+7}}$$

und hieraus

$$\beta = 6{,}0754 \text{ Zoll;}$$

folglich

$$A = 1{,}9 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 14400}{3{,}5483}$$

$$= 3855 \text{ Fuß.}$$

Drittes Kapitel.

Zeit-Bestimmungen, bei Ausleerung und Füllung von Gefäßen mit Wasser.

---

§. 217.

Aufgabe.

An der tiefsten Stelle des Bodens eines mit Wasser angefüllten Gefäßes ist eine horizontale Oeffnung von a Quadrat-Fußen; der Wasserspiegel ist anfänglich h Fuße über a; in jeder Secunde beträgt der Wasser-Zufluß m Cubic-Fuße; demohnerachtet senkt sich der Wasserspiegel um x Fuße in der Zeit von t Secunden. Man soll t als Funktion von x ausdrücken.

Auflösung.

Es sei *Fig.* 60 ein lothrechter Durchschnitt des Gefäßes durch a genommen, bd die Durchschnittslinie desselben mit dem anfänglichen Wasserspiegel; ef die mit dem Wasserspiegel, wie er nach Verlauf von t Secunden ist; φx der Quadrat-Inhalt des zu ef gehörigen horizontalen Querschnitts; $t = Fx$. Bezeichnet nun k die Tiefe zu welcher sich der Wasserspiegel in der Zeit $t' = F(x+k) - Fx$ senkt, so ist in dieser Zeit t' nicht nur die zugeflossene Wasser-Menge $m.t'$ sondern auch das Wasser-Volumen von der Höhe k zwischen den parallelen horizontalen Ebenen φx und $\varphi(x+k)$ abgeflossen. Dieses Volumen kann aber durch $k.\varphi(x+k')$ aus-

gedrückt werden, wenn k' eine zwischen o und k liegende Größe bezeichnet, und es ist also die in der Zeit t' durch a abgeführte Wasser-Menge
$$= mt' + k\varphi(x+k').$$

Durch a würde aber, bei einer unveränderlichen Geschwindigkeits-Höhe e in der Zeit t' die Wasser-Menge
$$t'.\alpha a\sqrt{e} \text{ (§. 161) abfließen.}$$

Nun ist hier zu Anfang der Zeit t' die Geschwindigkeitshöhe $= h - x$; am Schluß derselben
$$= h - x - k; \text{ folglich}$$
$t'.\alpha a.\sqrt{h-x}$ größer; $t'\alpha a\sqrt{h-x-k}$ kleiner wie
$$mt' + k\varphi(x+k');$$
und es muß daher, wenn k'' eine zwischen o und k fallende Größe ausdrückt, einen Werth für k'', innerhalb der erwähnten Gränzen, geben, dem gemäß
$$t'\alpha a\sqrt{h-x-k''} = mt' + k\varphi(x+k') \text{ ist.}$$

Aus dieser Gleichung folgt; t' oder
$$F(x+k) - Fx = \frac{k\varphi(x+k')}{\alpha a\sqrt{h-x-k''} - m}$$
und hieraus
$$F'x + \frac{k}{2}F''x + \ldots = \frac{\varphi(x+k')}{-m + \alpha a\sqrt{h-x-k''}}.$$

Für $k = 0$; also auch $k' = 0$ und $k'' = 0$ ergiebt sich aus der dargestellten Gleichung
$$F'x = \frac{\varphi x}{-m + \alpha a\sqrt{h-x}}; \text{ also}$$
$$Fx = t = \int \frac{\varphi x}{-m + \alpha a\sqrt{h-x}} + C.$$

§. 218.

Aufgabe.

Für verschiedene, der Form nach gegebene Gefäße, nach der in vorigen §. hergeleiteten Formel t zu bestimmen.

Auflösung.

I. Das Gefäß sei prismatisch, sein unveränderlicher horizontaler Querschnitt $= A$; so ist

$$t = Fx = A\int\frac{dx}{-m+\alpha a\sqrt{h-x}}.$$

Setzt man nun $-m+\alpha a\sqrt{h-x} = y$;

$$\text{so ist } x = h - \left(\frac{y+m}{\alpha a}\right)^2; \text{ also}$$

$$dx = -2.\frac{y+m}{\alpha a}.\frac{dy}{\alpha a}; \text{ folglich}$$

$$t = -\frac{2A}{\alpha^2 a^2}.\int\frac{y+m}{y}dy$$

$$= -\frac{2A}{\alpha^2 a^2}.(y+m\log n\, y)+C$$

$$= -\frac{2A}{\alpha^2 a^2}.[-m+\alpha a\sqrt{h-x}+m.\ln(-m+\alpha a\sqrt{h-x})]+C.$$

Für $x = o$ ist auch $t = o$; daher

$$C = \frac{2A}{\alpha^2 a^2}.[-m+\alpha a\sqrt{h}+m\ln(-m+\alpha a\sqrt{h})]$$

folglich vollständig

$$t = \frac{2A}{\alpha^2 a^2}\left[\alpha a(\sqrt{h}-\sqrt{h-x})+m.\ln\frac{-m+\alpha a\sqrt{h}}{-m+\alpha a\sqrt{h-x}}\right].$$

Findet kein Zufluß statt, d. h. ist $m = o$; so hat man die Zeit der Senkung bis zur Tiefe x

$$= \frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{h} - \sqrt{h-x})$$

und hieraus die Zeit der gänzlichen Leerung des prismatischen Gefäßes

$$= \frac{2A}{\alpha a} \cdot \sqrt{h}.$$

Findet der Zufluß m statt, und soll die Tiefe x bestimmt werden, für welche der Wasserspiegel bleibend wird, also der Beharrungszustand eintritt, so hat man die Gleichung

$$\alpha a \sqrt{h-x} = m \text{ und hieraus}$$

$$x = h - \left(\frac{m}{\alpha a}\right)^2.$$

Soll die Zeit bestimmt werden, welche von Anfang an bis zu dem Augenblick verfließt, in welchen der Beharrungszustand eintritt, so muß man in die Formel

$$t = \frac{2A}{\alpha^2 a^2}\left[\alpha a(\sqrt{h} - \sqrt{h-x}) + m \ln \frac{-m + \alpha a\sqrt{h}}{-m + \alpha a\sqrt{h-x}}\right]$$

für x den Werth $h - \left(\frac{m}{\alpha a}\right)^2$ schreiben; dann ergiebt sich aber, weil dieser Zustand dann bleibend ist, t = unendlich groß, und man muß deswegen um die verlangte Zeit zu erhalten für x einen, etwas weniger kleineren Werth als $h - \left(\frac{m}{\alpha a}\right)^2$ schreiben.

II. Das Gefäß bilde eine abgekürzte Pyramide; der Quadrat-Inhalt des anfänglichen Wasserspiegels sei = A; der, des horizontalen Bodens = B; so ist

$$\varphi x = \left[\frac{h\sqrt{A} - (\sqrt{A} - \sqrt{B})x}{h}\right]^2 \text{ oder}$$

$$\varphi x = A\left(1 - \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{h\sqrt{A}} x\right)^2 \text{ oder}$$

$$\frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{h\sqrt{A}} = n \text{ gesetzt,}$$

$$\varphi x = A(1 - nx)^2; \text{ folglich}$$

$$t = A\int \frac{(1 - nx)^2}{-m + \alpha a\sqrt{h - x}}; \text{ oder}$$

$$-m + \alpha a\sqrt{h-x} = y \text{ gesetzt}$$

$$t = -\frac{2A}{\alpha^6 a^6} \cdot \int [(1 - nh)\alpha^2 a^2 + n(y+m)^2]^2 \left(1 + \frac{m}{y}\right) dy.$$

Wird nun $(1 - nh)\alpha^2 a^2 + nm^2$ durch p;

$p^2 + 4nm^2 p$ durch C

$6nmp + 4n^2 m^3$ durch D

$8n^2 m^2 + 2pn$ durch E

ausgedrückt, so entsteht

$$t = -\frac{2A}{\alpha^6 a^6}\int\left(C + Dy + Ey^2 + 5n^2 my^3 + n^2 y^4 + \frac{p^2 m}{y}\right) dy$$

$$= -\frac{2A}{\alpha^6 a^6}(Cy + \tfrac{1}{2}Dy^2 + \tfrac{1}{3}Ey^3 + \tfrac{5}{4}n^2 my^4 + \tfrac{1}{5}n^2 y^5 + p^2 m \log n\, y) + C.$$

Für $x = 0$; also $y = -m + \alpha a\sqrt{h}$ wird auch $t = 0$; und es ergiebt sich die Const.

Findet kein Zufluß statt, d. h. ist $m = 0$, so ist $p = (1 - nh)\alpha^2 a^2$

$$C = p^2$$
$$D = 0$$
$$E = 2pn$$
$$y = \alpha a \sqrt{h - x}$$

und die Zeit der Senkung bis zur Tiefe x

$$= \frac{-2Ay}{\alpha^6 a^6}(p^2 + \tfrac{2}{3} p n y^2 + \tfrac{1}{5} n^2 y^4) + C$$

wo Const =

$$\frac{2A\alpha a\sqrt{h}}{\alpha^6 a^6}(p^2 + \tfrac{2}{3} p n \alpha^2 a^2 h + \tfrac{1}{5} n^2 \alpha^4 a^4 h^2) \text{ ist.}$$

Für $m = 0$ und $x = h$ ergiebt sich hieraus die Zeit der gänzlichen Ausleerung = Const; oder wenn man die Werthe für p und n setzt,

$$= \frac{2\sqrt{h}}{15\alpha a}(3A + 8B + 4\sqrt{AB}).$$

Soll, wenn Zufluß statt findet, die Zeit, bis zum eintretenden Beharrungszustand bestimmt werden, so verfahre man wie in I.

III. Das Gefäß bilde einen Kugel-Abschnitt; bd sei $= 2b$; die Höhe $= h$; so ist

$$\varphi x = \frac{(h - x)(b^2 + hx)}{h}\pi; \text{ also}$$

$$t = \frac{\pi}{h}\int \frac{(h - x)(b^2 + hx)}{-m + \alpha a\sqrt{h - x}}$$

oder $-m + \alpha a \sqrt{h - x}$ durch y,

$\frac{2\pi}{\alpha^6 a^6 h}$ durch A

$3\alpha^2 a^2 (b^2 + h^2) - 5m^2 h$ durch B

$3\alpha^2 a^2 (b^2 + h^2) - 10m^2 h$ durch C

$\alpha^2 a^2 (b^2 + h^2) - 10m^2 h$ durch D

$\alpha^2 a^2 (b^2 + h^2) - m^2 . h$ durch E ausgedrückt,

$$t = -A \int \left(Bm^2 + Cmy + Dy^2 - 5mhy^3 - hy^4 + \frac{m^3 E}{y} \right) dy$$

$$= -A(Bm^2 y + \tfrac{1}{2} Cmy^2 + \tfrac{1}{3} Dy^3 - \tfrac{5}{4} mhy^4 - \tfrac{1}{5} hy^5 + m^3 E \operatorname{logn} y) + C.$$

Für $x = 0$ wird auch $t = 0$ und

$$y = -m + \alpha a \sqrt{h} = e; \text{ folglich}$$

$$C = A(Bm^2 e + \tfrac{1}{2} Cme^2 + \tfrac{1}{3} De^3 - \tfrac{5}{4} mhe^4 - \tfrac{1}{5} he^5 + m^3 E \operatorname{logn} e)$$

daher

$$t = A \left[Bm^2(e - y) + \tfrac{1}{2} Cm(e^2 - y^2) + \tfrac{1}{3} D(e^3 - y^3) - \tfrac{5}{4} mb(e^4 - y^4) - \tfrac{1}{5} h(e^5 - y^5) + m^3 . E . \operatorname{logn} \frac{e}{y} \right].$$

Findet kein Zufluß statt, d. h. ist $m = 0$; so ist die Zeit der Senkung bis zur Tiefe x

$$= A[\tfrac{1}{3} D(e^3 - y^3) - \tfrac{1}{5} h(e^5 - y^5)]$$

oder, nach Substitution der Werthe für A, D, e, y;

$$= \frac{2\pi}{15 \alpha a h} (\sqrt{h} - \sqrt{h - x}) [(h^2 + 10b^2) h + (4h^2 - 5b^2) x - 3hx^2 + (5b^2 + 3hx - h^2) \sqrt{h(h - x)}]$$

und hieraus, für $x = h$; die Zeit der Leerung des Wassers aus dem Kugel-Abschnitt

$$= \frac{2\pi}{15 \alpha a} \sqrt{h} (2h^2 + 5b^2).$$

Für $b = h$; d. h. für die Halbkugel ergiebt sich die Zeit der Senkung bis zur Tiefe x

$$\frac{2\pi}{15\alpha a}(\sqrt{h}-\sqrt{h-x})[11h^2-hx-3x^2+(4h+3x)\sqrt{h(h-x)}]$$

und die Zeit der gänzlichen Ausleerung

$$=\frac{14\pi}{15\alpha a}h^2.\sqrt{h}.$$

§. 219.

Aufgabe.

In der ebenen Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes befindet sich eine Oeffnung a; der Wasserzufluß beträgt in jeder Secunde m Cubicfuß; man soll die Zeit T bestimmen, während welcher sich der Wasserspiegel bis zum höchsten Punkt der Oeffnung senkt.

Auflösung.

1) Die Ebene der Seitenwand in welcher sich die Oeffnung befindet, sei unter dem Winkel β gegen die Verticallinie geneigt; durch den höchsten Punkt der Oeffnung denke man sich eine Vertical-Ebene, normal auf die Ebene der Seitenwand, in welcher sich die Oeffnung befindet; *Fig.* 49 sei diese Vertical-Ebene; A der höchste Punkt der Oeffnung; AB die Durchschnittslinie der Ebene der Oeffnung mit der Vertical-Ebene; in D berühre der ursprüngliche Wasserspiegel; DA sei $=e$; AC $=x$ eine beliebige Absciße; y die zugehörige, rechtwinklichte, also horizontale, quer durch die Oeffnung laufende Ordinate, so ist nach §. 163 die Wasser-Menge,

welche bei unveränderlichen Wasserspiegel durch den zu x und y gehörigen Theil der Oeffnung a fließt

$$= \alpha \sqrt{\mathrm{Cos}\,\beta}\,.\int y \sqrt{e+x} + C.$$

Ist nun, y als Funktion von x gegeben, und die Integration, so wie die Constanten-Bestimmung ausgeführt, so setze man für x denjenigen bestimmten Werth, zu welchen die ganze Oeffnung a gehört, und bezeichne das Resultat, also die Wasser-Menge, welche in jeder Secunde durch die ganze Oeffnung a ausfließen würde, wenn der Wasserspiegel unveränderlich bis D reichte, als Funktion von $DA = e$, durch fe.

2) Ist nun, wenn der Wasserspiegel nicht unveränderlich bleibt, sondern der Zufluß in jeder Secunde $= m$ ist, in der Zeit t der Wasserspiegel so tief gesunken, daß er $DA = e$ in G berührt, und wird $DG = z$; $t = Fz$; der horizontale Querschnitt des Gefäßes zum Punkt $G = \varphi z$ gesetzt, so wird, wenn z um k wächst, diese Senkung in der Zeit $F(z+k) - Fz$ erfolgen, und während derselben wird der Zufluß

$$m.[F(z+k) - Fz] \text{ Cubic-Fuß}$$

betragen, das Volumen der Senkung aber zwischen

$$k\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\varphi z \text{ und } k\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\varphi(z+k) \text{ fallen,}$$

folglich, wenn k' eine zwischen o und k liegende Größe bezeichnet,

$$= k\,\mathrm{Cos}\,\beta.\,\varphi(z+k')$$

zu setzen sein.

Der in dieser Zeit $F(z+k) - Fz$ erfolgende Ausfluß fällt aber nach 1, zwischen

$$[F(z+k)-Fz].f(e-z) \text{ und}$$
$$[F(z+k)-Fz].f[e-(z+k)];$$

kann daher, wenn k'' eine zwischen o und k liegende Grösse andeutet, durch

$$[F(z+k)-Fz]\,f[e-(z+k'')]$$

ausgedrückt werden, und man hat also die Gleichung

$$[F(z+k)-Fz]\,f[e-(z+k'')] = m[F(z+k)-Fz] + k \operatorname{Cos}\beta\,\varphi(z+k').$$

Aus ihr folgt, wenn man die taylorsche Reihe anwendet, durch k dividirt, dann k, also auch k' und k'' gleich Null setzt, und $F'z$ entwickelt,

$$F'z = \frac{\operatorname{Cos}\beta\,.\,\varphi z}{-m+f(e-z)}; \text{ also}$$

$$t = Fz = \operatorname{Cos}\beta \int \frac{\varphi z}{-m+f(e-z)} + C.$$

Nach geschehener Integration und Constanten-Bestimmung hat man dann

$$T = Fe.$$

§. 220.

Zusatz.

Die Anwendung der Formel

$$t = Fz = \operatorname{Cos}\beta \int \frac{\varphi z}{-m+f(e-z)} + \text{Const}$$

führt auch in den einfachsten Fällen, auf sehr verwickelte Ausdrücke. Es sei z. B. das Gefäß prismatisch, sein horizontaler Querschnitt $= A$; $\beta = o$; auch $m = o$; a ein rechtwinklichtes Parallelogramm, dessen horizontale Grundlinie $= b$ und dessen lothrechte Höhe $= h$ ist; so ist nach §. 165. II.

$$f(e-z) = \tfrac{2}{3}\alpha b\left[(e-z+h)^{\frac{3}{2}} - (e-z)^{\frac{3}{2}}\right];$$

folglich

$$t = Fz = \int \frac{A}{\tfrac{2}{3}\alpha b\left[(e+h-z)^{\frac{3}{2}} - (e-z)^{\frac{3}{2}}\right]}$$

$$= \frac{3A}{2\alpha b}\int \frac{dz}{(e+h-z)^{\frac{3}{2}} - (e-z)^{\frac{1}{2}}};$$

oder, $e-z=u$ gesetzt

$$t = -\frac{3A}{2\alpha b}\int \frac{du}{(h+u)^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{3A}{2\alpha b}\int \frac{(h+u)^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{3}{2}}}{(h+u)^3 - u^3}.du$$

$$= -\frac{3A}{2\alpha b h}\int \frac{(h+u)^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{3}{2}}}{h^2 + 3hu + 3u^2}.du$$

$$= -\frac{3A}{2\alpha b h}\left\{\begin{array}{l}\int \frac{(h+u)^{\frac{3}{2}}.du}{h^2+3hu+3u^2} = N \\ \int \frac{u^{\frac{3}{2}}.du}{h^2+3hu+3u^2} = M\end{array}\right\}.$$

In Beziehung auf N setze man $h+u=w^2$; so wird

$$N = 2.\int \frac{w^4.dw}{h^2 - 3hw^2 + 3w^4}.$$

In Beziehung auf M aber $u=v^2$; so wird

$$M = 2\int \frac{v^4.dv}{h^2+3hv^2+3v^4}.$$

Nach den Integral-Tafeln von Meier Hirsch pag. 86 und 87 lassen sich nun die Werthe von N und M bestimmen. Führt man die mühsame Arbeit wirklich durch, und setzt zuletzt $z=e$, so er-

hält man endlich, nach mancher weitläuftigen Reduction, folgende, doch höchst ungeschickte, praktisch unbrauchbar zu nennende, Formel

$$T = \frac{A}{\alpha b} \cdot \frac{\sqrt{e+h} + \sqrt{e} - \sqrt{h}}{h} + \frac{A\sqrt{2}}{2\alpha b \sqrt{h} \cdot \sqrt[4]{3}} \cdot$$

$$\Big[\ln \Big[(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})(h + e\sqrt{3} + 2 \operatorname{Sin} 15^\circ \cdot \sqrt[4]{3 e^2 h^2}) \cdot$$

$$[h + (h+e)\sqrt{3} - 2 \operatorname{Cos} 15^\circ \cdot \sqrt[4]{3 h^2 (e+h)^2}] \Big]$$

$$- \ln 2 \operatorname{Sin} 15^\circ . (h^2 + 3e^2 + 3eh)$$

$$+ \operatorname{Arctg} \frac{2 \operatorname{Sin} 15^\circ . \sqrt[4]{3h^2(e+h)^2}}{h - (h+e).\sqrt{3}} - \operatorname{Arc.tg} \frac{2 \operatorname{Cos} 15^\circ \sqrt[4]{3e^2 h^2}}{h - e\sqrt{3}}$$

$$- \operatorname{Arc\,tang} (-\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}) \Big].$$

Ist etwa $e = 16'$; $h = 9'$; so erhält man

$$T = \frac{A}{\alpha b} \cdot \tfrac{2}{3} + \frac{A}{3\alpha b \sqrt[4]{12}} (0{,}962577 + 2{,}852158$$

$$- 2{,}12101 - 2{,}392118)$$

$$= 0{,}541 \cdot \frac{A}{\alpha b} \cdot$$

Für solche Fälle verfährt man in der Anwendung am zweckmäßigsten, wenn man die Entfernung des Schwerpunktes der Oeffnung vom anfänglichen Wasserspiegel als die anfängliche Druckhöhe, die Oeffnung selbst aber, als horizontal betrachtet, und dann nach der Formel §. 218. I.

$$\frac{2A}{\alpha b} (\sqrt{h} - \sqrt{h-x}),$$ rechnet.

In Beziehung auf diese wäre hier

$$h = 16' + \tfrac{2}{2};\ x = 16';\ a = 9 . b$$

$$\text{folglich } T = \frac{2A}{\alpha . 9 . b} (\sqrt{20,5} - \sqrt{4,5})$$

$$= 0,534 \cdot \frac{A}{\alpha b} .$$

Ist etwa $\alpha = 5$; $b = 2'$; $A = 2000$ Quadratfuß, so giebt die genaue Formel $T = 108\frac{1}{5}$ Secunde; die Näherungs-Formel aber $T = 106\frac{4}{5}$ Secunden.

§. 221.

Aufgabe.

Die Aufgabe sei dieselbe wie in §. 219; nur mit der Abweichung, daß die Oeffnung a bis zum ursprünglichen Wasserspiegel reicht.

Auflösung.

1) Fällt *Fig.* 49; D in A; ist $AC = x$ die zugehörige, rechtwinklichte, also horizontale, quer durch die Oeffnung gehende Ordinate $= y$, so ist, weil $e = 0$ ist, die Wasser-Menge, welche bei unveränderlichen Wasserspiegel, durch den zu x und y gehörigen Theil der Oeffnung a ausfließt

$$= \alpha \sqrt{\text{Cos}\,\beta} . \int y . \sqrt{x} + C.$$

2) Man setze das Resultat dieser Formel $= fx$; und diejenige Abscisse, zu welcher die ganze Oeffnung a gehört $= h$, so ist $f(h - x)$ die Wasser-Menge, welche in jeder Secunde ausfließen würde, wenn der unveränderliche Wasserspiegel nur bis C reichte.

3) Die Zeit t der Senkung des Wasserspiegels von A bis C sei $= Fx$; der horizontale Quer-

schnitt des Gefäßes zum Punkt C gleich φx; der Zufluß in jeder Secunde $= m$; so hat man, ganz so, wie in §. 219 die Gleichung

$$[F(x+k)-Fx].f[h-(x+k'')] = m[F(x+k)-Fx] + k \operatorname{Cos}\beta\, \varphi(x+k');$$

und hieraus

$$t = Fx = \operatorname{Cos}\beta \int \frac{\varphi x}{-m + f(h-x)} + C.$$

§. 222.

Zusatz.

Zur Anwendung der Formel in §. 221 sei die Oeffnung a rechtwinklicht, ihre horizontale Breite $= b$; das Gefäß prismatisch, sein horizontaler Querschnitt $= A$; so ist

$$f(h-x) = \frac{2\alpha b}{3} \sqrt{\operatorname{Cos}\beta}.(h-x)^{\frac{3}{2}} \quad \text{§. 165. III.}$$

also

$$t = \operatorname{Cos}\beta. \int \frac{A\,dx}{-m + \frac{2\alpha b}{3}\sqrt{\operatorname{Cos}\beta}.(h-x)^{\frac{3}{2}}}$$

oder $h - x = u^2$ und $\frac{3m}{2\alpha b \sqrt{\operatorname{Cos}\beta}} = a^3$ gesetzt,

$$t = -\frac{3A\sqrt{\operatorname{Cos}\beta}}{\alpha b} \int \frac{u\,du}{u^3 - a^3}.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{u^3 - a^3} = \frac{1}{3a^2}\left(\frac{1}{u-a} - \frac{2a+u}{u^2+au+a^2}\right)$$

folglich

$$t = -\frac{A\sqrt{\operatorname{Cos}\beta}}{\alpha b a^2} \int \left(\frac{u}{u-a} - \frac{2au+u^2}{u^2+au+a^2}\right) du.$$

Nun ist $\int \frac{u\,du}{u-a} = u + a \log n (u-a)$

und $\int \frac{2au + u^2}{u^2 + au + a^2} . du,$

wenn $v - \frac{a}{2}$ für u gesetzt wird,

$$= \int \frac{v^2 + av - \frac{3}{4}a^2}{v^2 + \frac{3}{4}a^2} . dv$$

$$= \int \left(1 + 2a . \frac{2v - 3a}{4v^2 + 3a^2}\right) dv$$

$$= v + 4a \int \frac{v\,dv}{4v^2 + 3a^2} - 6a^2 \int \frac{dv}{4v^2 + 3a^2}$$

$$= v + \frac{a}{2} \log n (4v^2 + 3a^2) - a\sqrt{3} \int \frac{d\frac{2v}{a\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2v}{a\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= u + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \ln 4 (u^2 + au + a^2)$$

$$- a\sqrt{3} . \operatorname{Arc tg} \frac{2v}{a\sqrt{3}}$$

$$= u + \frac{a}{2} \ln(u^2 + au + a^2) - a\sqrt{3} . \operatorname{Arc.tg} \frac{2u + a}{a\sqrt{3}} + C.$$

Demnach

$$t = -\frac{A\sqrt{\operatorname{Cos}\beta}}{\alpha b a^2} \left[a \ln(u-a) - \frac{a}{2} \ln(u^2 + au + a^2) \right.$$

$$\left. + a\sqrt{3} \operatorname{Arc tg} \frac{a + 2u}{a\sqrt{3}} \right] + C$$

$$= -\frac{A\sqrt{\operatorname{Cos}\beta}}{\alpha b a} \left[\tfrac{1}{2} \ln \frac{(u-a)^3}{u^3 - a^3} + \sqrt{3} . \operatorname{Arctg} \frac{a + 2u}{a\sqrt{3}} \right] + C.$$

Für $x = 0$; also $u^2 = h$ wird $t = 0$; daher

Const.

$$\text{Const} = \frac{A\sqrt{\text{Cos}\beta}}{\alpha b a}\left[\tfrac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{h}-a)^3}{h^{\frac{3}{2}}-a^3} + \sqrt{3}\,\text{Arc tg}\frac{a+2\sqrt{h}}{a\sqrt{3}}\right]$$

folglich vollständig

$$t = \frac{A\sqrt{\text{Cos}\beta}}{\alpha b a}\left[\tfrac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{h}-a)^2(u^2+au+a^2)}{(u-a)^2(h+a\sqrt{h}+a^2)} + \sqrt{3}\left(\text{Arc tg}\frac{a+2\sqrt{h}}{a\sqrt{3}} - \text{Arc tg}\frac{a+2u}{a\sqrt{3}}\right)\right].$$

Setzt man nun $m = 0$; so wird auch $a = 0$

und $$\frac{\tfrac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{h}-a)^2 \cdot (u^2+au+a^2)}{(u-a)^2 \cdot (h+a\sqrt{h}+a^2)}}{a}$$

wird, wenn $a = 0$ ist,

$$= \frac{3(\sqrt{h}-u)}{2u\sqrt{h}}\text{; ferner}$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\text{Arc tg}\frac{a+2\sqrt{h}}{a\sqrt{3}} - \text{Arc. tg}\frac{a+2u}{a\sqrt{3}}\right)}{a}$$

wird, wenn $a = 0$ ist,

$$= \frac{3(\sqrt{h}-u)}{2u\sqrt{h}};$$

folglich ist, für $m = 0$;

$$t = \frac{3A\sqrt{\text{Cos}\beta}}{\alpha b}\cdot\frac{\sqrt{h}-u}{u\sqrt{h}}\text{; oder}$$

$$t = \frac{3A\cdot\sqrt{\text{Cos}\beta}}{\alpha b}\cdot\frac{\sqrt{h}-\sqrt{h-x}}{\sqrt{h(h-x)}}$$

welches Resultat sich übrigens leichter ergiebt, wenn man gleich anfänglich, ehe man integrirt, $m = 0$ setzt.

Soll aus der letzteren Formel

$$t = \frac{3A\sqrt{\text{Cos}\beta}}{\alpha b}\cdot\frac{\sqrt{h}-\sqrt{h-x}}{\sqrt{h(h-x)}};$$

die Zeit der gänzlichen Ausleerung bis zum tiefsten Punkt der Oeffnung bestimmt werden, so setze man, wie in §. 218. I, für x einen, etwas weniges, kleineren Werth als h, indem für $x = h$ ein unendlich großes Resultat entstehen muß, weil zuletzt der Abfluß nur tropfenweis erfolgen kann.

§. 223.

Aufgabe.

Mit einem Gefäß I *Fig.* 61 in welchem der Wasserspiegel unveränderlich bis nm erhalten wird, ist durch eine Oeffnung vom Inhalt a ein anderes II verbunden. Der Unterschied der Wasserspiegel, oder die anfängliche Druckhöhe sei $= h$; man soll die Zeit t bestimmen, während welcher in II das Wasser zur Höhe x steigt.

Auflösung.

Der horizontale Querschnitt in II zum Endpunkt von x gehörig, sei $= \varphi x$; $t = Fx$; wächst nun x um k, so erfolgt dies in der Zeit $F(x+k) - Fx$, und es ergiebt sich, wenn k' und k'' Größen bezeichnen, die zwischen Null und k liegen, sehr leicht die Gleichung

$$k\varphi(x+k') = \alpha a \sqrt{h-x-k''}\,.\,[F(x+k)-Fx]$$

und hieraus

$$t = Fx = \frac{1}{\alpha a}\int\frac{\varphi x}{\sqrt{h-x}}.$$

§. 224.

Zusatz.

1) Ist das Gefäß II prismatisch, sein unveränderlicher horizontaler Querschnitt $= A$ Quadratfuße, so ist

$$t = Fx = \frac{A}{\alpha a} \int (h - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= - \frac{2A}{\alpha a} . \sqrt{h - x} + \text{Const.}$$

$$= \frac{2A}{\alpha a} (\sqrt{h} - \sqrt{h - x}) \text{ wie §. 218. I.}$$

und die Zeit bis zur gänzlichen Anfüllung von II

$$= \frac{2A}{\alpha a} . \sqrt{h}.$$

2) Ist das Gefäß II parabolisch; a im Scheitelpunkt; die Höhe des anfänglichen Wasserspiegels in II über a gleich e, der Parameter der Parabel $= p$; also $\varphi x = \pi . p(e + x)$; so hat man

$$t = Fx = \frac{\pi p}{\alpha a} \int \frac{e + x}{\sqrt{h - x}}$$

$$= \frac{2\pi p}{3\alpha a} [(3e + 2h)\sqrt{h} - (3e + 2h + x)\sqrt{h - x}]$$

und hieraus, für $x = h$

$$t = \frac{2\pi p}{3\alpha a} (3e + 2h)\sqrt{h}$$

und für $x = h$ und $e = 0$;

$$t = \frac{2\pi p}{3\alpha a} . 2h\sqrt{h}$$

oder, wenn A die Oberfläche in II, welche mit nm

in eine Ebene fällt, bezeichnet;

$$t = \frac{4A}{3\alpha a}\sqrt{h}.$$

§. 225.

Aufgabe.

Mit dem Gefäß I, welches keinen Zufluß hat (*Fig.* 62) ist vermittelst der Oeffnung a das Gefäß II verbunden. Die anfängliche Geschwindigkeitshöhe sei $= h$; in welcher Zeit t wird das Wasser in II zur Höhe x steigen?

Auflösung.

1) Senkt sich in der Zeit $t = Fx$ der Wasserspiegel in I zur Tiefe y, so ist der Cubic-Inhalt der Schicht von der Höhe y in I, dem von der Höhe x in II gleich zu setzen, und aus dieser Gleichung y zu entwickeln. Der sich ergebende Werth ist eine Funktion von x und soll durch fx ausgedrückt werden, so daß man also

$y = fx$ hat.

2) Wächst nun x um k, und bezeichnet φx den zum Endpunkt von x gehörigen horizontalen Querschnitt des Gefäßes II, so ergiebt sich, wie bisher

$$t = Fx = \frac{1}{\alpha a}\int \frac{\varphi x}{\sqrt{h - x - fx}}.$$

§. 226.

Zusatz.

Sind beide Gefäße prismatisch, der Quadrat-Inhalt des horizontalen Querschnitts von I gleich

A; der von II gleich B; so hat man

$$y = \frac{Bx}{A}; \text{ und}$$

$$t = \frac{B}{\alpha a}\int \frac{1}{\sqrt{h - x - \frac{B}{A}x}};$$

oder $\frac{A+B}{A} = n$ gesetzt,

$$t = \frac{B}{\alpha a}\int (h - nx)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{2B}{\alpha an}\sqrt{h - nx} + C$$

$$= \frac{2B}{\alpha an}(\sqrt{h} - \sqrt{h - nx})$$

$$= \frac{2AB}{\alpha a(A+B)}\left(\sqrt{h} - \sqrt{h - \frac{A+B}{A}x}\right).$$

Soll nun die Zeit T angegeben werden, nach Verlauf welcher das Wasser in beiden Gefäßen gleich hoch steht, so hat man

$$y = h - x = \frac{Bx}{A}; \text{ also}$$

$$x = \frac{Ah}{A+B}; \text{ und}$$

$$T = \frac{2AB}{\alpha a(A+B)} \cdot \sqrt{h}.$$

Aufgaben

zur Anwendung der Formeln dieses dritten Kapitels.

§. 227.

Aufgabe.

In einem See dessen mittlerer horizontaler Querschnitt 60000 Quadrat-Fuß beträgt, befindet sich 9 Fuß unter dem Wasserspiegel eine Oeffnung von einem Quadrat-Fuß. Wenn nun der Zufluß in jeder Secunde 10 Cubic-Fuß beträgt; in welcher Zeit wird dann der Wasserspiegel 5′ gesunken sein?

Auflösung.

Ist $\alpha = 6{,}42$ wofür $6\frac{1}{2}$ anzunehmen ist, so hat man nach §. 218. I. die verlangte Zeit

$$t = \frac{2 \cdot 60000}{6{,}5^2 \cdot 1^2} \cdot \Big[6{,}5 \cdot 1 \cdot (\sqrt{9} - \sqrt{9-5}) + 10 \cdot \ln \frac{-10 + 6{,}5 \cdot 1 \cdot \sqrt{9}}{-10 + 6{,}5 \cdot 1 \cdot \sqrt{9-5}} \Big]$$

= 51200 Secunden = 14 Stunden, $13\frac{1}{2}$ Minuten.

Die Tiefe zu welcher der Wasserspiegel überhaupt sich senkt, ist

$$= 9 - \left(\frac{10}{6{,}5 \cdot 1} \right)^2 = 6{,}6332 \text{ Fuß}$$

und setzt man nun, um die zugehörige Zeit zu bestimmen, $x = 6{,}63$, so erhält man dieselbe

$$= \frac{2 \cdot 60000}{6{,}5^2} \Big[6{,}5 \cdot (\sqrt{9} - \sqrt{9 - 6{,}63})$$

$$+ 10 . \ln \frac{-10 + 6{,}5 . \sqrt{9}}{-10 + 6{,}5 . \sqrt{9 - 6{,}63}} \Big]$$

= 64 Stunden, 50 Minuten, 19 Secunden.

Soll die Senkung $6\frac{1}{2}$ Fuß erfolgen, so ist die erforderliche Zeit

= 35 Stunden, 9 Minuten, 27 Secunden.

Findet kein Zufluß statt, so ist die Zeit der Senkung von 5 Fuß

$$= \frac{2 . 60000}{6{,}5} . (\sqrt{9} - \sqrt{9 - 5})$$

= 5 Stunden, 7 Minuten, $35\frac{1}{2}$ Secunde,

und die Zeit der gänzlichen Leerung bis zu 9 Fuß Tiefe

= 15 Stunden, 22 Minuten.

§. 228.

Aufgabe.

In einem Gefäß, welches eine abgekürzte Pyramide bildet, sei die anfängliche Höhe $h = 16$ Fuß, der Quadrat-Inhalt des horizontalen Bodens oder $B = 4$ Q Fuß; der Wasserspiegel $A = 9$ Quadrat-Fuß, und es finde kein Zufluß statt; man soll die Zeit t der gänzlichen Leerung bestimmen.

Auflösung.

Nach §. 218. II ist hier, wenn $a = \frac{4}{9}$ Quadrat-Fuß, $x = 6{,}5$ gesetzt wird,

$$t = \frac{2 . \sqrt{16}}{15 . 6{,}5 . \frac{4}{9}} (3 . 9 + 8 . 4 + 4 . \sqrt{9 . 4})$$

= beinahe $15\frac{1}{3}$ Secunde.

§. 229.

Aufgabe.

An der tiefsten Stelle eines mit Wasser angefüllten Kugel-Abschnitts, sei eine Oeffnung $a = \frac{1}{2}$ Quadrat-Fuß. Die anfängliche Höhe h sei $= 9'$; der Halbmesser b des Wasserspiegels $= 10'$; $\alpha = 6{,}5$; der Zufluß in der Secunde oder $m = 4$ Cubic-Fuß; man soll die Zeit t bestimmen, in welcher sich der Wasserspiegel um 5 Fuß senkt.

Auflösung.

Nach §. 218. III, ist hier

$$y = -4 + 6{,}5 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{9-5} = 2{,}5;$$

$$A = \frac{2 \cdot \pi}{6{,}5^6 \cdot (\frac{1}{2})^6 \cdot 9} = 0{,}00059243;$$

$$B = 3 \cdot 6{,}5^2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \cdot (10^2 + 9^2) - 5 \cdot 4^2 \cdot 9$$
$$= 5015{,}4375$$

$$C = 3 \cdot 6{,}5^2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 (10^2 + 9^2) - 10 \cdot 4^2 \cdot 9$$
$$= 4295{,}4375$$

$$D = 6{,}5^2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \cdot (10^2 + 9^2) - 4^2 \cdot 9 \cdot 10$$
$$= 471{,}8125$$

$$E = 6{,}5^2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \cdot (10^2 + 9^2) - 4^2 \cdot 9$$
$$= 1767{,}8125$$

$$e = -4 + 6{,}5 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{9} = 5{,}75$$

also

$$t = 0{,}00059243 \cdot \Big[5015{,}4375 \cdot 4^2 \cdot (5{,}75 - 2{,}5)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot 4295{,}4375 \cdot 4 \cdot (5{,}75^2 - 2{,}5^2) + \tfrac{1}{3} \cdot 471{,}8125 \cdot (5{,}75^3$$

$$-2{,}5^3) - \tfrac{5}{4}\cdot 4\cdot 9\cdot(5{,}75^4 - 2{,}5^4) - \tfrac{1}{5}\cdot 9\cdot(5{,}75^5 - 2{,}5^5)$$

$$+ 4^3 \,.\, 1767{,}8125 \,.\, \mathrm{logn} \,.\, \frac{5{,}75}{2{,}5}\Big]$$

$$= 5 \text{ Minuten, } 28\tfrac{1}{3} \text{ Secunde.}$$

Findet kein Zufluß statt, so ist die Zeit der Senkung auf 5 Fuß

$$= \frac{2\pi}{15 \cdot 6{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9}\big[(9^2 + 10 \,.\, 10^2) \,.\, 9 + (4 \cdot 9^2 - 5 \,.\, 10^2) \,.\, 5$$

$$- 3 \cdot 9 \,.\, 5^2 + (5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 9 \cdot 5 - 9^2) \cdot 3 \cdot 2\big]$$

$$= 2 \text{ Minuten, } 44\tfrac{2}{3} \text{ Secunden.}$$

und die Zeit der gänzlichen Ausleerung

$$\frac{2 \,.\, \pi}{15 \,.\, 6{,}5 \,.\, \frac{1}{2}} \,.\, 3 \,.\, (2 \cdot 9^2 + 5 \,.\, 10^2) = 256 \text{ Secunden}$$

oder 4 Minuten, 16 Secunden, beinahe.

§. 230.

Aufgabe.

An einem See, dessen mittlerer horizontaler Querschnitt = 200000 Quadrat-Fuß ist, befindet sich ein Ueberfall, dessen horizontale Breite = 40′ ist, und über welchen anfänglich das Wasser 4′ hoch abfließt. Der Zufluß ist in so weit abgeschnitten, daß derselbe in jeder Secunde nur noch 100 Cubic-Fuß beträgt. Nach welcher Zeit wird der Wasserspiegel nur noch 1 Fuß hoch über dem Fachbaum stehen?

Auflösung.

Nach §. 222 ist hier

$A = 200000$; $b = 40'$; $h = 4'$; $x = 3$; $\beta = 0$;

$u^2 = 4 - 3 = 1$; also auch

$$u = 1;\ m = 100;\ a^3 = \frac{3 \cdot 100}{2 \cdot 5 \cdot 40} = \tfrac{3}{4};$$

also $a = 0{,}90856$, folglich die verlangte Zeit

$$t = \frac{200000}{5 \cdot 40 \cdot 0{,}90856}\left[\tfrac{1}{2}\ln\frac{1{,}09144^2 \cdot 2{,}73404}{0{,}09144^2 \cdot 6{,}6426}\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\left(\text{Arc tg}\,\frac{4{,}90856}{0{,}90856 \cdot \sqrt{3}} - \text{Arc tg}\,\frac{2{,}90856}{0{,}90856 \cdot \sqrt{3}}\right)\right]$$

$= 2498{,}4$ Secunden

$= 41$ Minuten, $38\tfrac{2}{5}$ Secunden.

Der Beharrungsstand tritt ein, in dem Augenblick, in welchen die Höhe f des Wassers über dem Fachbaum nur noch so groß ist, als die Gleichung

$$\tfrac{2}{3} \cdot 5 \cdot 40 \cdot f \cdot \sqrt{f} = 100 \quad \text{ergiebt.}$$

Man erhält $f = \sqrt[3]{(\tfrac{3}{4})^2} = 0{,}82548'$ beinahe $= 10$ Zoll.

Findet kein Zufluß statt, so ist die Zeit der Senkung von 3 Fuß

$$= \frac{3 \cdot 200000}{5 \cdot 40} \cdot \frac{2-1}{2 \cdot 1} = 25 \text{ Minuten.}$$

§. 231.

Aufgabe.

Die Zeit zu Anfüllung und Ausleerung einer Schleusenkammer zu bestimmen.

Auflösung.

1) Bestimmung der Zeit zu Anfüllung der Kammer.

Es sei das Schoßthürchen im Oberthor $3\tfrac{1}{2}'$ hoch und $2'$ breit; die Entfernung seines Schwerpunktes vom Ober-Wasserspiegel $= 6'$; der Cubic-

Inhalt des Raums in der Kammer zwischen dem Unter-Wasserspiegel und der durch den Schwerpunkt vom Schoßthürchen des Oberthors gedachten Horizontal-Ebene = 20000 Cubic-Fuß; der horizontale Querschnitt der Kammer = 6000 Quadrat-Fuß.

Man betrachte, um die Anwendung weitläuftiger Formeln zu vermeiden, das Wasser bis zur Höhe der Horizontal-Ebene durch den Schwerpunkt vom Schoßthürchen des Oberthors als frei ausfließend, und bezeichne die hierzu erforderliche Zeit mit t, so ist hinreichend genau nach der Formel $\alpha a \sqrt{h} = M$; hier $\alpha = 5$ gesetzt,

$$t \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{6} = 20000; \text{ also}$$

$$t = \frac{20000}{5 \cdot 7 \cdot \sqrt{6}} = 233{,}28 \text{ Secunden.}$$

Nach §. 224. I, ist nun, ebenfalls hinreichend genau, die Zeit bis zur gänzlichen Anfüllung

$$= \frac{2 \cdot 6000}{5 \cdot 7} \cdot \sqrt{6} = 839{,}82 \text{ Secunden;}$$

folglich die Zeit der gänzlichen Anfüllung

$$= 1073{,}1 \text{ Secunde.}$$

2) Bestimmung der Zeit der Ausleerung der Kammer durch das Schoßthürchen des Unterthors.

Der Quadrat-Inhalt der Oeffnung des Unterthors sei = 7 Quadrat-Fuß; die Entfernung der Wasserspiegel des Ober- und Unter-Wassers = 10 Fuß, so ist mit hinreichender Schärfe, nach §. 218. I, die Zeit der Ausleerung

$$= \frac{2 \cdot 6000}{5 \cdot 7} \cdot \sqrt{10} = 1084{,}2 \text{ Secunden.}$$

Demnach ist die Zeit der Füllung und Leerung

$$= 35 \text{ Minuten, } 57\tfrac{1}{3} \text{ Secunden.}$$

Viertes Kapitel.

Von der Kraft des bewegten Wassers, insbesondere von den ober und unterschlächtigen Wasser-Rädern.

§. 232.

Aufgabe.

Eine Wasser-Masse trift mit der Geschwindigkeit c und den Querschnitt a, eine stillstehende festgehaltene Ebene E normal. Man soll die Einwirkung P des Wassers auf E bestimmen.

Auflösung.

Bezeichnet M die in jeder Secunde die Ebene E treffende Wasser-Menge, so ist für irgend eine Zeit t, das Gewicht der Wasser-Masse, deren Geschwindigkeit c durch die Gegenwirkung P der Ebene E, in der Zeit t, vernichtet wird, $= Mt\gamma$, wenn γ das Gewicht eines Cubic-Fußes Wasser ausdrückt. Nach der Formel

$$c = 2g \frac{P}{Q} \cdot t \quad \text{§. 66. I}$$

ist also hier

$$c = 2g \frac{P}{Mt\gamma} . t$$

und hieraus die Gegenwirkung, oder die ihr gleiche Einwirkung, oder auch der absolute Stoß

$$P = \frac{c}{2g} M\gamma.$$

§. 233.

Zusatz.

Ist die bewegte Flüssigkeit nicht Wasser, sondern eine andere, etwa Luft, und bezeichnet q das Gewicht eines Cubic-Fußes derselben, so ist

$$P = \frac{c}{2g} Mq.$$

§. 234.

Zusatz.

Wird die Ebene E nicht normal sondern unter dem Winkel β vom Wasser getroffen, so ist die normale Geschwindigkeit $= c \operatorname{Sin} \beta$; also

$$P = \frac{c \operatorname{Sin} \beta}{2g} M\gamma.$$

§. 235.

Zusatz.

Bewegt sich E nach der auf E normalen Richtung mit der Geschwindigkeit v, der Einwirkung des Wassers entsprechend, so ist der Einfluß derselbe als wenn E still stände, und das Wasser nur mit der Geschwindigkeit $c - v$ oder $c \operatorname{Sin} \beta - v$, je nachdem der Stoß normal oder schief ist, ankäme, folglich der relative Stoß

$$P = \frac{c - v}{2g} M\gamma$$

für die normale; und

$$P = \frac{c \operatorname{Sin} \beta - v}{2g} M\gamma$$

für die schiefe Einwirkung des Wassers.

Es versteht sich hierbei von selbst daß c oder $c \operatorname{Sin} \beta$ größer wie v ist, indem sonst gar keine Einwirkung statt fände.

§. 236.

Zusatz.

Setzt man in die Formel für den absoluten Stoß

$$P = \frac{c}{2g} M\gamma$$

für M seinen Werth ac, so entsteht

$$P = \frac{c^2}{2g} \cdot a\gamma$$

oder, wenn h die zu c gehörige Fallhöhe ausdrückt

$$P = 2ha\gamma.$$

§. 237.

Zusatz.

Die bisherigen Formeln sind sowohl beim isolirten Wasserstrahl, als auch, wenn das Wasser in einem Gerinne eingeschlossen ist, dessen Querschnitt von E beinahe ganz erfüllt ist, anwendbar. Ist dieß nicht der Fall, wie z. B. bei Schiffmühlen-Rädern, so ist nach den Versuchen von Bassüt, d'Alembert, Langsdorf, Condorcet nur die Hälfte zu nehmen.

§. 238.

Aufgabe.

An einem Faden hängt eine Kugel deren Gewicht unter Wasser $= p$ ist; man soll aus dem Winkel β, welchen der Faden mit der Verticallinie dann bildet, wenn die Kugel sich im fließenden Wasser (ganz untergetaucht, aber sehr nahe an der Oberfläche) befindet und still steht, die Geschwindigkeit c des Wassers bestimmen.

Auflösung.

Bezeichnet r den Halbmesser der Kugel, so würde, wenn die Kreis-Ebene $r^2\pi$ normal vom Wasser getroffen würde, die absolute Einwirkung

$$= \frac{c}{2g} M\gamma = \frac{c}{2g} . r^2\pi . c . \gamma = \frac{c^2 r^2 \pi\gamma}{2g}$$

sein.

Setzt man nun, daß sich die Einwirkung auf die Kugelfläche zu der normalen auf ihre Projection wie $n : m$ verhält, so hat man die horizontale Einwirkung auf die Kugelfläche

$$= \frac{n}{m} . \frac{c^2 r^2 \pi\gamma}{2g}$$

welche Q heißen mag.

Für eine andere Geschwindigkeit, $= c'$, welcher der Winkel β' zugehört sei die Einwirkung auf dieselbe Kugel $= Q'$; so ist

$$Q' = \frac{n}{m} . \frac{c'^2 . r^2 \pi\gamma}{2g}; \text{ also}$$

$$Q : Q' = c^2 : c'^2.$$

Nach dem Parallelogramm der Kräfte hat man aber auch

$$Q = p \operatorname{tg} \beta \text{ und}$$
$$Q' = p \operatorname{tg} \beta'; \text{ also}$$
$$Q : Q' = \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \beta'; \text{ folglich}$$
$$c^2 : c'^2 = \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \beta'; \text{ daher}$$

$$c = \frac{c'}{\sqrt{\operatorname{tg} \beta'}} \sqrt{\operatorname{tg} \beta}.$$

Ist μ aus mehreren Versuchen durch schwimmende Körper ein Mittelwerth für $\frac{c'}{\sqrt{\operatorname{tg} \beta'}}$, so hat man dann

$$c = \mu . \sqrt{\operatorname{tg} \beta}.$$

Ein einfaches Werkzeug um β zu messen, ist der Stromquadrant.

§. 239.

Aufgabe.

Das Moment der Kraft des Wassers am oberschlächtigen Rade anzugeben.

Auflösung.

Man stelle sich vor, daß das Wasser, welches nach eingetretenen Beharrungszustand in den Zellen durch sein Gewicht wirkt, als ein körperliches Ringstück ABCD *(Fig. 63)* um die Peripherie des Theilrisses von N bis P gleichförmig vertheilt wäre.

Bezeichnet nun M die Wasser-Menge welche in jeder Secunde aufs Rad stürzt, v die Geschwindigkeit womit die Peripherie des Theilrisses sich dreht, b die Länge des Bogens NP; a die Länge

der

der zugehörigen Sehne; r den Halbmesser des Theilrisses; F den in dem horizontalen Halbmesser liegenden Schwerpunkt des körperlichen Ringstücks oder der centrischen Kreislinie von N bis P, so ist der Querschnitt dieses körperlichen Ringstücks $= \frac{M}{v}$, also das Gewicht desselben $= b . \frac{M}{v} \gamma$; folglich das statische Moment dieses Gewichts in Beziehung auf die Achse des Rades

$$= b . \frac{M}{v} . \gamma . EF.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkt hat man aber

$$b : a = r : EF; \text{ folglich}$$
$$b . EF = a . r;$$

also das verlangte Moment vom Gewicht des Ringstücks oder des Wassers in den Zellen

$$= a . r . \frac{M}{v} . \gamma$$

und die Kraft selbst, in die Peripherie des Theilrisses reducirt,

$$= a . \frac{M}{v} . \gamma.$$

Bezeichnet nun ferner c die Geschwindigkeit, womit das Wasser nach der Richtung GN unter dem Winkel β mit dem Halbmesser in die Zellen stürzt, so ist, nach §. 235, die Einwirkung, am Endpunkt des Halbmessers r

$$= \frac{c \operatorname{Sin} \beta - v}{2g} M\gamma;$$

daher die gesammte Kraft, tangential in der Peripherie des Theilrisses

$$= a\frac{M}{v}\gamma + \frac{c \operatorname{Sin}\beta - v}{2g} M\gamma$$

folglich das statische Moment derselben

$$= r.\left(a\frac{M}{v}\gamma + \frac{c \operatorname{Sin}\beta - v}{2g} M\gamma\right)$$

und das mechanische

$$= v.\left(a\frac{M}{v}\gamma + \frac{c \operatorname{Sin}\beta - v}{2g} M\gamma\right).$$

§. 240.

Zusatz.

Erfahrungen zufolge wird es für vortheilhaft gehalten, die Größe der Last so zu wählen, daß kein Stoß erfolgt, also $v = c \operatorname{Sin}\beta$ ist. Da nun ferner, im Mittel $a = \frac{5}{6}$ vom Durchmesser des Theilrisses zu setzen ist, so hat man also für solche Fälle

die Kraft in die Peripherie reducirt

$$= \tfrac{5}{3}.r.\frac{M}{v}.\gamma$$

daher ihr statisches Moment

$$= \tfrac{5}{3}r^2.\frac{M}{v}.\gamma$$

und ihr mechanisches

$$= \tfrac{5}{3}r.M\gamma.$$

§. 241.

Aufgabe.

Beim unterschlächtigen Rad im geraden Gerinne, die tangentiale Wirkung der Kraft des Wassers aufs Rad zu bestimmen.

Auflösung.

Bezeichnet c die Geschwindigkeit womit das Wasser die Schaufeln normal trift, v die der Schaufeln in der Mitte ihres eingetauchten Theils; r den Halbmesser der Peripherie durch diese Mittelpunkte; M die ankommende Wasser-Menge in jeder Secunde, so hat man, nach §. 235 die verlangte Kraft

$$= \frac{c - v}{2g} M\gamma$$

folglich ihr stetisches Moment

$$= r \, . \, \frac{c - v}{2g} M\gamma$$

und ihr mechanisches

$$= \frac{v(c - v)}{2g} M\gamma.$$

Bei Schiffmühlenrädern muß man nach §. 237 im Nenner 4g für 2g setzen.

§. 242.

Aufgabe.

Die Größe von v der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß das mechanische Moment $\frac{v(c-v)}{2g} M\gamma$ größtmöglichst werde.

Auflösung.

Es wird v(c—v) ein Max. wenn $v = \frac{1}{2}c$ genommen wird.

Für $v = \frac{1}{2}c$ ist dann das mechanische Moment

$$= \tfrac{1}{2} \, . \, \frac{c^2}{4g} M\gamma;$$

oder wenn h die zu c gehörige Höhe ausdrückt, das größte mechanische Moment

$$= \frac{1}{2} h M \gamma.$$

§. 243.

Aufgabe.

Beim unterschlächtigen Rad im Kropfgerinne die tangentiale Kraft des Wassers aufs Rad zu bestimmen.

Auflösung.

Bezeichnet v die Geschwindigkeit der Mittelpunkte des vom Wasser getroffenen Theils der Schaufeln, oder der mittleren Peripherie des Rades; r den zugehörigen Halbmesser; c die Geschwindigkeit womit das Wasser die Schaufeln trift; β den Winkel, welchen die Richtung von c mit der Ebene der getroffenen Schaufel bildet; a die Höhe des Kropfs oder des wasserhaltenden Bogens, M die in jeder Secunde ankommende Wasser-Menge, so ist die Einwirkung des bewegten Wassers, nach §. 235,

$$= \frac{c \operatorname{Sin} \beta - v}{2g} M \gamma$$

und die aus dem Gewicht des zwischen den Schaufeln befindlichen Wassers entspringende Kraft, in die Peripherie von r reducirt, nach §. 239

$$= a . \frac{M}{v} . \gamma$$

folglich die gesammte tangentiale Kraft P in der Peripherie zu r

$$= \frac{c \operatorname{Sin} \beta - v}{2g} M \gamma + a \frac{M}{v} \gamma$$

also ihr statisches Moment

$$= r\left(\frac{c \operatorname{Sin} \beta - v}{2g} + \frac{a}{v}\right). M\gamma$$

und ihr mechanisches

$$= \left(\frac{v(c \operatorname{Sin} \beta - v)}{2g} + a\right) M\gamma.$$

§. 244.

Zusatz.

Kann die Einrichtung so getroffen werden, daß $\beta = 90^\circ$ wird, so hat man die Kraft

$$= \left(\frac{c - v}{2g} + \frac{a}{v}\right) M\gamma$$

und ihr mechanisches Moment

$$= \left(\frac{v(c - v)}{2g} + a\right) M\gamma.$$

Für $v = \frac{1}{2}c$ wird dieses ein Max. und seine Größe ist

$$= \frac{1}{2} \frac{c^2}{4g} M\gamma + a M\gamma$$

oder, wenn h die zu c gehörige Höhe bezeichnet

$$= (\tfrac{1}{2}h + a) M\gamma.$$

§. 245.

Aufgabe.

Bei der Voraussetzung, daß man auch bei Anlage eines Kropfes, $\beta = 90^\circ$ machen, d. h. das anschlagende Wasser normal auf die Schaufeln leiten kann, soll beurtheilt werden, ob es vortheilhafter ist, ein ganzes nutzbares Gefälle h zu einem horizontalen Gerinne zu benutzen, oder einen Theil

a der Höhe desselben zu einen Kropf zu verwenden.

Auflösung.

Im ersten Fall ist das größte mechanische Moment, nach §. 242 ohne Rücksicht auf Contraktion

$$= \frac{1}{2} h M\gamma.$$

Im zweiten aber, nach §. 244

$$= [\tfrac{1}{2}(h - a) + a] M\gamma$$
$$= \tfrac{1}{2}(h + a) M\gamma$$

woraus, vorausgesetzt, daß $\beta = 90°$ ist, die Anlage eines Kropfes als vortheilhafter hervorgeht.

§. 246.

Aufgabe.

In einem horizontalen Gerinne sollen 2 unterschlächtige Räder hintereinander angelegt, und die Geschwindigkeit des ersteren so bestimmt werden, daß bei beiden Rädern gleiche mechanische Momente statt finden, mit der Bedingung, daß das zweite seine vortheilhafteste Geschwindigkeit, nemlich $\frac{1}{2}v$ erhalten soll.

Auflösung.

Bezeichnet c die Geschwindigkeit, womit das Wasser das erste Rad trift, so ist das mechanische Moment der Kraft fürs erste Rad

$$= \frac{c - v}{2g} M\gamma . v$$

und fürs zweite

$$= \frac{v - \frac{1}{2}v}{2g} . M\gamma . \frac{v}{2}.$$

Die Gleichstellung beider Ausdrücke giebt

$$v = \frac{4}{5} \cdot c.$$

§. 247.

Zusatz.

Bei derselben Aufgabe für 3 hintereinander liegende Räder, erhält man

die Geschwindigkeit des ersten $= \frac{25}{29} c$

die des zweiten $= \frac{20}{29} c$

und die des dritten $= \frac{10}{29} c$.

§. 248.

Aufgabe.

Man hat ein Gefälle $= h$ und will dieses zu einem geneigten Gerinne dergestalt benutzen, daß in demselben n hintereinander liegende Räder, jedes mit derselben Geschwindigkeit z vom Wasser getroffen werde, so daß jeden die vortheilhafteste Geschwindigkeit $\frac{1}{2} z$ mitgetheilt werden kann, um gleiche mechanische Momente hervorzubringen. Wie muß h vertheilt werden?

Auflösung.

Das Gefälle für's erste Rad sei $= x$. Weil nun, wie man sich leicht überzeugt, alle folgenden Räder einerlei Zuwachs y an Gefälle haben müssen, so hat man

$$1)\quad x + (n - 1) y = h.$$

Nun ist in Beziehung aufs erste Rad

$$z = \alpha \sqrt{x};\ \text{also}$$

$$\frac{1}{2} z = \frac{1}{2} \alpha \sqrt{x}$$

folglich in Beziehung auf jedes der übrigen $n-1$ Räder, nach §. 69. 10;

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{2}z)^2 + 4gy}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2 x + 4gy}$$

daher

$$2)\quad \alpha\sqrt{x} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2 x + 4gy}$$

und aus beiden Gleichungen ergiebt sich

$$y = \frac{3\alpha^2}{16g + (n-1).3\alpha^2}.h$$

$$x = \frac{16g}{16g + (n-1).3\alpha^2}.h$$

§. 249.

Aufgabe.

Man hat ein Gefälle $= a + b$ für zwei hintereinander im geneigten Gerinne angebrachte unterschlächtige Räder; das für's erste sei $= a$; das für's zweite $= b$; letzteres soll sich mit der vortheilhaftesten Geschwindigkeit bewegen; wie groß (x) muß die des ersten sein, damit die mechanischen Momente beider Räder gleich groß werden?

Auflösung.

Die Geschwindigkeit womit das Wasser das erste Rad trift, ist $= \alpha\sqrt{a}$; die womit das zweite Rad getroffen wird

$$= \sqrt{x^2 + 4gb}$$

also das mechanische Moment des ersten Rades

$$= \frac{\alpha\sqrt{a} - x}{2g} M\gamma . x$$

und das, des zweiten

$$=\frac{\sqrt{x^2+4gb}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4gb}}{2g}M\gamma.\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4gb}$$

$$=\frac{x^2+4gb}{4}.\frac{M\gamma}{2g}.$$

Daher die Bedingungsgleichung

$$(\alpha\sqrt{a}-x)x=\frac{x^2+4gb}{4}$$

und hieraus

$$x=\frac{2\alpha\sqrt{a}\pm\sqrt{4\alpha^2a-20bg}}{5}.$$

Die Auflösung ist also nur dann möglich, wenn a mindestens

$$=\frac{5g}{\alpha^2}.b \text{ ist.}$$

Anmerk. Anwendungen dieser Formeln folgen in der Maschinenlehre.

Fünftes Kapitel.

Von den vorzüglichsten Vorrichtungen das Wasser zu heben, nemlich vom Heber, den Saugpumpen und den Druckpumpen.

a) Vom Heber.

§. 250.

Aufgabe.

Die gebogene Röhre, oder der Heber ABC (*Fig.* 64) sei voll Wasser und werde in einer verticalen Ebene gedacht. Der lothrechte Abstand des unveränderlichen Wasserspiegels im Gefäß N worin-

nen die Einmündung A des Hebers eingesenkt ist, von der Ausmündung desselben bei C, also DE sei $= h$; der Querschnitt des Hebers im Lichten $= a$. Man soll die Geschwindigkeit c des Wassers im Heber und die Wasser-Menge M bestimmen, welche in jeder Secunde aus N, vermittelst des Hebers, bei C ausfließen wird.

Auflösung.

Der Druck der Luft auf den Wasserspiegel in N ist (nach § 47. 2) eben so groß, als der einer Wassersäule von 32 Fuß Höhe. Wenn nun, wie erforderlich ist, die lothrechte Entfernung vom Scheitelpunkt B des Hebers bis zum Wasserspiegel in N, also BD, kleiner wie 32 Fuß ist, so ist die Druckhöhe, welche das Wasser nach der Richtung AB in den Heber treibt $= 32 - BD$ und weil bei C der Druck der Luft dem, der Druckhöhe BE entsprechenden, Bestreben des Wassers auszufließen, entgegenwirkt, so ist die gegenwirkende Druckhöhe $= 32 - BE$; folglich die Druckhöhe, welche das Wasser nach der Richtung ABC durch den Heber treibt

$$= 32 - BD - (32 - BE) = BE - BD = DE = h.$$

Man hat also, ohne Rücksicht auf die Hindernisse, welche das Wasser an den Wänden des Hebers aufhalten

$$c = \alpha \sqrt{h}; \text{ folglich}$$
$$M = \alpha a \sqrt{h}.$$

Mit Berücksichtigung derselben aber, wenn l die centrische Länge der Röhre, d ihren Durchmesser bezeichnet, nach §. 192

$$c = 6{,}42 \,.\, \sqrt{\frac{50\,d\,h}{l + 50\,d}}$$

$$M = 5\,d^2 \,.\, \sqrt{\frac{50\,d\,h}{l + 50\,d}}\,.$$

Sollen auch die Hindernisse der Anprallung des Wassers bei B berücksichtigt werden, und ist der Winkel ABD = β; so bleibt die auf Geschwindigkeit wirkende Druckhöhe nach §. 192 und 194 nur

$$h - \frac{c^2\,l}{2006\,d} - 0{,}00387 \,.\, c^2 \operatorname{Cos} \beta^2$$

und folglich ist

$$c = \alpha \sqrt{h - \frac{c^2\,l}{2006\,d} - 0{,}00387\, c^2 \operatorname{Cos} \beta^2}$$

woraus sich c ergiebt.

§. 251.

Zusatz.

Hat das Gefäß N keinen Zufluß und soll die Zeit der Senkung des Wasserspiegels zu einer gegebenen Tiefe bestimmt werden, so verfahre man ganz nach §. 217

b) Von den Saugpumpen.

§. 252.

Erklärung.

Zwei, vermittelst eines Ventils in EF, communicirende Cylinder ABCD und EFGH *Fig.* 65 nebst einem in dem obern Cylinder ABCD, dem Stiefel, auf und nieder beweglichen, hohlen, mit einem Ventil versehenen Cylinder, dem Kolben, bilden eine Saugpumpe.

Die Wirkungsart ist folgende: Steht der untere Cylinder EFGH, das Saugrohr, im Wasser und communicirt mit demselben, so wird, wenn der Kolben aus seinem tiefsten Stand, unmittelbar über CD, in die Höhe gezogen wird, das Ventil desselben, vermöge seines Gewichts geschlossen bleiben, folglich; die umgebende Luft stärker wie die im Raum EFGH gewesene, nun in einen größeren verbreitete, also verdünnte auf GH drücken, also durch den Ueberschuß das Ventil bei EF gehoben werden, und die Luft, welche den Raum GCDH erfüllte, sich in einen größeren verbreiten, folglich verdünnen, so daß der stärkere Druck der äußeren Luft das Wasser in das Saugrohr bis zur irgend einer Höhe, etwa bis k pressen wird, nemlich so weit bis die verdünnte Luft mit Hülfe der Wassersäule von der Höhe HK der äußeren Luft das Gleichgewicht hält.

Wird nun der Kolben, nachdem er in seiner höchsten Stelle JN angekommen ist, welche nothwendig weniger als 32′ über dem Wasserspiegel GH liegen muß, indem sonst das Wasser nicht folgen würde, wieder niedergedrückt, also die Luft unter ihm zusammengepreßt, so schließt sie das Ventil in EF und drückt das im Kolben auf, so daß die Luft im Raum JNCD, ausströmen kann.

Wenn nun der Kolben abermals in die Höhe gezogen wird, so steigt das Wasser im Saugrohr höher u. s. w. bis endlich der ganze Raum unter dem Kolben, und bei dem folgenden Niedergang, auch der über dem Kolben voll Wasser ist. Bei jedem nun folgenden Aufzug des Kolben wird das

Wasser über ihn gehoben und in ein anzubringendes Behältniß ausgeschüttet, bei jedem Niedergang aber wieder Wasser über den Kolben gepreßt. Der so eingetretene Zustand heißt dann der **Beharrungszustand**.

§. 253.

Aufgabe.

Die Zeit t eines Kolbenhubs der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß das durch den Druck der äußeren Luft, nachgetriebene Wasser, den Kolben nicht verläßt.

Auflösung.

Die Entfernung CG vom tiefsten Stand des Kolben bis zum Wasserspiegel sei $= e$; der Weg des Kolben, oder der Kolbenhub $= b$; der Querschnitt des Stiefels $= A$; der des Saugrohrs, also auch der Oeffnung EF $= a$; so ist die anfängliche Druckhöhe $= 32 - e$; die am Ende

$$= 32 - e - b;$$

folglich nach §. 224. 1, die Zeit, in welcher das Wasser zur Höhe b steigen wird

$$= \frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{32 - e} - \sqrt{32 - e - b}).$$

Bei Herleitung dieser Formel sind die Hindernisse, welche das Wasser an den Wänden findet, und die Trägheit desselben unberücksichtigt geblieben, und ob diese gleich hier nur von geringen Einfluß sind, so wird doch während des Steigens des Wassers, zur Höhe b, mehr Zeit verfließen, als obige Formel angiebt, also auch, damit das nachfolgende

Wasser den Kolben nicht verläßt, die Einrichtung so getroffen werden müssen, daß seine Bewegung langsamer ist. Für die Ausübung verfährt man sicher, wenn man t so groß wählt, daß während dieser Zeit t (ohne Berücksichtigung der oben erwähnten Hindernisse bestimmt) das Wasser doppelt so hoch, also zur Höhe 2b, steigen könnte.

Hiernach hat man also

$$t = \frac{2A}{\alpha a} \cdot (\sqrt{32 - e} - \sqrt{32 - e - 2b}).$$

§. 254.

Zusatz.

Aus dem vorigen §. ergiebt sich die Größe w der mittleren Geschwindigkeit, welche der Kolben beim in die Höhe gehen, heben darf

$$= \frac{b}{t}; \text{ oder}$$

$$w = \frac{\alpha a b}{2A(\sqrt{32 - e} - \sqrt{32 - e - 2b})}.$$

Nach Eytelweins Angabe sind im Mittel, den Erfahrungen gemäß, $\frac{1}{3}$ Fuß und $2\frac{1}{2}$ Fuß die Gränzen des Werths, den w haben darf, deshalb nicht unter $\frac{1}{3}$ Fuß, weil bei einem zu langsamen Gang des Kolben, wenn der Kolben nicht luftdicht in den Stiefel paßt, zu viel Wasser zurück tritt, also ein zu großer Hubverlust entsteht.

§. 255.

Aufgabe.

Die Wasser-Menge m zu bestimmen, welche

eine Saugpumpe in jeder Minute in die Höhe fördert.

Auflösung.

Ist w die Geschwindigkeit des Kolben, so würde derselbe, wenn er immer in die Höhe ginge, in jeder Secunde die Wasser-Menge Aw fördern, unter A den Querschnitt des Stiefels verstanden Ist nun die Einrichtung so getroffen, daß der Kolben sich gleichförmig bewegt, also eben so viele Zeit zum Herunter, als zum Heraufgehen gebraucht, so ist die Wasser-Menge in jeder Minute nicht 60 Aw, sondern nur 30 Aw. Rechnet man hiervon, wegen des unvermeidlichen Hubverlustes im Mittel ein Zehntel ab, so hat man

$$m = 27 . A . w.$$

§. 256.

Aufgabe.

Die Kraft P′ zu bestimmen, welche nach eingetretenen Beharrungszustand, erforderlich ist den Kolben zu erheben.

Auflösung.

Es bezeichne (*Fig.* 66) F den tiefsten; B den höchsten, G den mittleren Stand des Kolben, ferner, in Fußen,

b = BF die Größe des Kolbenhubs;

A den Querschnitt, D den Durchmesser, L = RF die Länge } des Stiefels;

w die Geschwindigkeit des Kolben, also auch des Wassers im Stiefel;

a den Querschnitt des Saugrohrs, so wie der beiden Ventile;

d den zugehörigen Durchmesser;

l die Länge des Saugrohrs;

$H = L + l$ den lothrechten Abstand

RE vom Ausguß bis zum Unter-Wasser.

Es soll der mittlere Werth für P'; d. h. derjenige bestimmt werden, welcher in dem Augenblick, fürs Gleichgewicht, erforderlich ist, in welchen der Kolben sich auf der Mitte seines Wegs, nemlich in G befindet.

I. Bestimmung der Kraft p womit das unter dem Kolben befindliche Wasser denselben, während seines in die Höhe-gehens, nach oben preßt.

Ohne Rücksicht auf alle anderweitige Hindernisse, wäre, blos hydrostatisch betrachtet

$$p = (32 - GE)\,A\gamma$$
$$= (32 - l - \tfrac{1}{2}b)\,A\gamma.$$

Nun ist aber

1) die Höhe, um die Geschwindigkeit $\frac{Aw}{a}$ im Saugrohr hervorzubringen

$$= \frac{\left(\frac{Aw}{a}\right)^2}{\alpha^2} \text{ (nach §. 160).}$$

2) Die Höhe, um die Hindernisse an den Wänden des Saugrohrs zu überwinden nach §. 192. I

$$= \frac{\left(\frac{Aw}{a}\right)^2 . l}{2006 . d}.$$

und die, zur Ueberwindung der Hindernisse im Stiefel auf die Länge $\frac{b}{2}$;

$$= \frac{w^2 . \frac{1}{2} b}{2006\, D}.$$

3) Ferner ist die Ueberwucht x, welche erforderlich ist, die Wasser-Masse $\frac{1}{2} b A \gamma$ im Stiefel, und die $a l \gamma$ im Saugrohr, oder, wenn man sie in den Stiefel reducirt, die reducirte

$$\frac{\left(\frac{A w}{a}\right)^2 . a l \gamma}{w^2}; \text{ oder } \frac{A^2}{a} . l \gamma$$

in der Zeit $t = \frac{b}{w}$ durch den Weg b zu führen, nach der Gleichung §. 66. III.

$$b = g \frac{x}{\frac{1}{2} b A \gamma + \frac{A^2}{a} l \gamma} . \left(\frac{b}{w}\right)^2$$

zu bestimmen. Man erhält

$$x = \frac{w^2}{g b} \left(\frac{1}{2} b + \frac{A}{a} l\right) A \gamma;$$

also die Höhe, welche hierzu verwendet wird

$$= \frac{w^2}{g b} \left(\frac{1}{2} b + \frac{A}{a} l\right).$$

4) Man erhält daher die übrigbleibende Wirkung als Druck auf den Kolben von unten nach oben, oder

$$p = \left[32 - l - \frac{1}{2} b - \left(\frac{A w}{\alpha a}\right)^2 - \frac{A^2 w^2 l}{2006 d a^2} - \frac{w^2 b}{2.2006.D} - \frac{w^2}{g b}\left(\frac{1}{2} b + \frac{A}{a} l\right)\right] A \gamma.$$

II. Bestimmung der Kraft q welche fürs Gleichgewicht erforderlich ist, das Wasser über dem Kolben zu erheben, ohne Rücksicht auf den zu Hülfe kommenden Druck p.

Für den Stand des Kolben in G ist, blos hydrostatisch betrachtet

$$q = (32 + RG) A\gamma$$
$$= (32 + L - \tfrac{1}{2}b) A\gamma.$$

Nun ist aber

1) die Höhe, um die Geschwindigkeit w dem Wasser über dem Kolben mitzutheilen

$$= \frac{w^2}{4g}.$$

2) Die Höhe um die Hindernisse längs den Wänden des Stiefels zu überwinden

$$= \frac{w^2 (L - \tfrac{1}{2}b)}{2006 D}.$$

3) Ferner ist die Ueberwucht y welche erforderlich ist, die Wasser-Masse $\left(L - \frac{b}{2}\right) A\gamma$ in der Zeit $t = \frac{b}{w}$ durch den Weg b zu führen, aus der Gleichung

$$b = g \frac{y}{\left(L - \frac{b}{2}\right) A\gamma} \cdot \left(\frac{b}{w}\right)^2$$

zu bestimmen. Man erhält

$$y = \frac{w^2}{gb} \left(L - \frac{b}{2}\right) A\gamma$$

also die zugehörige Höhe

$$= \frac{w^2}{gb} \left(L - \frac{b}{2}\right).$$

4) Endlich ist, wenn man den Reibungswiderstand zwischen Kolben und Stiefel dem Gewicht einer Wassersaule von der Höhe z auf dem Kolben gleich setzt, dieser Widerstand $= zA\gamma$

$$= z \cdot \tfrac{1}{4} D^2 \pi \cdot \gamma.$$

Erfahrungen zufolge, steht aber näherungsweise dieser Widerstand im zusammengesetzten Verhältniß von H und D, kann also, wenn k eine Versuchszahl bezeichnet

$k \cdot D \cdot H$ gesetzt werden.

Man hat also

$$kDH = z \cdot \tfrac{1}{4} D^2 \pi \cdot \gamma; \text{ folglich}$$

$$z = \frac{4k}{\pi\gamma} \cdot \frac{H}{D}$$

und, wenn die Zahl $\frac{4k}{\pi\gamma}$ durch μ ausgedrückt wird

$$z = \mu \frac{H}{D}.$$

5) Es ist daher

$$q = \left[32 + L - \frac{b}{2} + \frac{w^2}{4g} + w^2 \frac{L - \frac{b}{2}}{2006\,D} + \frac{w^2}{gb}\left(L - \frac{b}{2}\right) + \mu \frac{H}{D}\right] A\gamma.$$

III. Die verlangte Kraft P' ist demnach $= q - p$; oder, wenn die Werthe für q und p gesetzt werden, so entsteht:

$$P' = \left[H + w^2\left[\frac{1}{4g} + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{A}{a}\right)^2 + \frac{L}{2006D} + \left(\frac{A}{a}\right)^2 \cdot \frac{l}{2006\,d}\right] + \frac{w^2}{gb}\left(L + \frac{A}{a} l\right) + \mu \frac{H}{D}\right] A\gamma.$$

§. 257.

Zusatz.

Es heißt

H die hydrostatische Widerstandshöhe;

$$w^2\left[\frac{1}{4g}+\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{A}{a}\right)^2+\frac{L}{2006\,D}+\left(\frac{A}{a}\right)^2\cdot\frac{l}{2006\,d}\right]$$

die hydraulische Widerstandshöhe;

$$\frac{w^2}{gb}\left(L+\frac{A}{a}l\right)$$

die mechanische Widerstandshöhe; und

$\frac{\mu H}{D}$ die Höhe des Reibungs-Widerstands.

Eytelweins Angaben zufolge kann man:
für gut polirte metallene Stiefel $\mu = 0{,}03$;
für nachgebohrte metallene Stiefel $\mu = 0{,}06$;
für gut gebohrte hölzerne Stiefel $\mu = 0{,}1$;
für schlecht gebohrte hölzerne Stiefel $\mu = 0{,}2$;
annehmen.

§. 258.

Zusatz.

In den Fällen in welchen eine oberflächlichere Bestimmung hinreichend ist, berücksichtigt man gewöhnlich nur die Hydrostatische und die Widerstandshöhe der Reibung, erhält also, wenn man im Mittel $\mu = 0{,}1$ annimmt

$$P' = \left(H + 0{,}1\,\frac{H}{D}\right)A\gamma \text{ oder}$$

$$P' = \frac{10D+1}{10D}AH\gamma.$$

§. 259.

Aufgabe.

Die Kraft P″ zu bestimmen, welche fürs Gleichgewicht im mittleren Stand des Kolben erforderlich ist, denselben nieder zu drücken.

Auflösung.

Beim Niedergang des Kolben ist die Communikation zwischen dem Saugrohr und Stiefel geschlossen, aber das Ventil im Kolben offen, und es ergiebt sich, wie in §. 256

die hydraulische Widerstandshöhe $\left(\frac{A w}{\alpha a}\right)^2$;

die Höhe des Reibungs-Widerstandes

$$= \mu \frac{L}{D}; \text{ folglich}$$

$$P'' = \left[\left(\frac{A w}{\alpha a}\right)^2 + \frac{\mu L}{D}\right] A \gamma.$$

§. 260.

Zusatz.

In den Fällen, in welchen eine oberflächlichere Bestimmung hinreichend ist, berücksichtigt man nur die Reibung, setzt aber, um sie reichlich in Rechnung zu bringen H für L; dann hat man, für $\mu = 0{,}1$;

$$P'' = \frac{H}{10 D} A \gamma.$$

§. 261.

Zusatz.

Da P' bedeutend größer wie P'' ist, so ordnet man, um eine gleichförmige Bewegung zu erhalten, die Pumpen paarweise an, dergestalt, daß mit dem Niedergehen des einen Kolben zugleich ein Indie-Höhe gehen des andern erfolgt. In solchen Fällen ist dann das (in §. 256 und 259 deswegen uner-

wähnt geblieben) Gewicht der Kolben und Kolbenstangen, als Last, ohne Einfluß, und bezeichnet P die erforderliche Kraft für ein Paar Pumpen, so hat man

$$P = P' + P''.$$

Die Wasser-Menge M welche durch ein Paar Pumpen in der Minute gefördert wird, ergiebt sich dann nach §. 255; nemlich

$$M = 54\,Aw.$$

§. 262.

Zusatz.

In den Fällen, in welchen eine oberflächlichere Bestimmung hinreichend ist, hat man nach §. 258

$$P' = \frac{10D + 1}{10D} AH\gamma$$

und nach §. 260

$$P'' = \frac{1}{10D} AH\gamma;$$

daher die Kraft für ein Paar Pumpen, oder

$$P = \frac{5D + 1}{5D} AH\gamma.$$

c) Von den Druckpumpen.

§. 263.

Erklärung.

Ein im Wasser stehender und mit demselben, vermöge eines Ventils communicirender Cylinder BCEF *Fig.* 67 in welchem Cylinder oder Stiefel ein genau eingepaßter, nicht durchbohrter Kolben auf und nieder beweglich ist, vermittelst eines Ven-

tils bei G mit einer Steigröhre EK verbunden, bildet eine Druckpumpe.

Die Wirkungsart ist folgende: befindet sich anfänglich der Kolben in seinem tiefsten Stand, in FE und wird nun in die Höhe gezogen, so schließt der stärkere Druck der äußeren atmosphärischen Luft das Ventil G, drückt aber das bei N in die Höhe und treibt das Wasser dem Kolben nach. Wird dann derselbe aus seinem höchsten Standpunkt in BC wieder nieder gedrückt, so schließt sich das Ventil N, das G wird aufgestoßen und das Wasser aus dem Raum BCEF in die Steigröhre über das Ventil G gepreßt. Nach mehreren Kolbenspielen fließt dann das Wasser bei K aus.

§. 264.

Aufgabe.

Die Zeit t eines Kolbenhubs, der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß das nachfolgende Wasser den Kolben nicht verläßt.

Auflösung.

Bezeichnet b den Kolbenhub BF; A den Querschnitt des Stiefels; a den des Ventils bei N, so hat man, ganz wie in §. 253

$$t = \frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{32} - \sqrt{32 - 2b})$$

und also die höchste mittlere Geschwindigkeit des Kolben, oder

$$w = \frac{\alpha a b}{2A(\sqrt{32} - \sqrt{32 - b})}.$$

§. 265.

Aufgabe.

Die Wasser-Menge m zu bestimmen, welche jede Druckpumpe in der Minute liefert.

Auflösung.

Ganz wie in §. 255 hat man

$$m = 27\,Aw.$$

§. 266.

Aufgabe.

Bestimmung der Kraft P' zum Niederdrücken des Kolben, nachdem der Beharrungszustand eingetreten ist.

Auflösung.

Es bezeichne, durchaus in Fußen,

D den Durchmesser } des Stiefels;
A den Querschnitt }

b die Länge desselben, oder den Kolbenhub;

d den Durchmesser } des Steigrohrs;
l die centrische Länge }

a den Querschnitt desselben, so wie den, der Oeffnungen der Ventile;

H die Förderungshöhe, d. h. die lothrechte Entfernung vom Ausguß bis zum Unter-Wasserspiegel.

Für den Augenblick, in welchem P' am größten erforderlich ist, nemlich für den, in welchen der Kolben seinen tiefsten Stand erreicht hat, ist, wie in §. 256 bestimmt,

die hydrostatische Widerstandshöhe $= H$

die hydraulische Widerstandshöhe

$$= w^2 \left[\left(\frac{A}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{A}{a}\right)^2 \cdot \frac{l}{2006\,d}\right]$$

die mechanische Widerstandshöhe

$$= \frac{w^2}{gb} \cdot \frac{A}{a} \cdot l$$

die Höhe des Reibungs-Widerstandes

$$= \mu \frac{H}{D}; \text{ also}$$

$$P' = \left[H + \left(\frac{wA}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{l}{2006\,d}\right) + \frac{w^2 A l}{gba} + \frac{\mu H}{D}\right] A\gamma.$$

§. 267.

Zusatz.

Ist l nicht sehr groß, so kann man wie in §. 258

$$P' = \frac{10D + 1}{10D} AH\gamma \text{ setzen.}$$

§. 268.

Aufgabe.

Bestimmung der Kraft P'' welche für den Beharrungszustand erforderlich ist, den Kolben zu erheben.

Auflösung.

Für den nachtheiligsten Augenblick, wo P'' am größten erforderlich ist, nemlich für den höchsten Stand des Kolben ist

die hydrostatische Widerstandshöhe $= b$;

die hydraulische $= w^2 \left[\left(\frac{A}{\alpha a}\right)^2 + \frac{b}{2006 D}\right]$;

die mechanische $= \frac{w^2}{g}$;

die, der Reibung $= \mu \frac{b}{D}$; folglich

$$P' = \left[b + w^2 \left[\left(\frac{A}{\alpha a}\right)^2 + \frac{b}{2006 D} + \frac{1}{g}\right] + \frac{\mu b}{D}\right] A\gamma.$$

§. 269.

Zusatz.

So wie in §. 260 kann man auch hier, wenn weniger Genauigkeit, hinreichend ist,

$$P'' = \left(b + \frac{\mu b}{D}\right) A\gamma$$

oder $\mu = \frac{1}{10}$ angenommen

$$P'' = \frac{10 D + 1}{10 D} A b \gamma \text{ setzen.}$$

§. 270.

Zusatz.

Für ein Paar Pumpen hat man also die für die zusammen treffenden nachtheiligsten Stellen, erforderliche Kraft

$$P = P' + P''$$

und die Wasser-Menge in jeder Minute, oder

$$M = 54 A w.$$

§. 271.

Zusatz.

Bei Näherungs-Bestimmungen kann man, nach §. 267 und 269

$$P = \frac{10D + 1}{10D} A(H + b)\gamma \text{ setzen.}$$

§. 272.

Zusatz.

Ist ein Windkessel, welchen man gewöhnlich eben so hoch und doppelt so weit, wie die Stiefel macht, angebracht, so bleibt das Wasser in der Steigröhre in fortwährender Bewegung, und man kann dann die mechanische Widerstandshöhe ganz außer Betracht lassen.

Die Maschinenlehre.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe.

§. 273.

Erklärungen.

Der Punkt einer Maschine auf welchen die Kraft unmittelbar einwirkt, heißt der Kraftpunkt, der, welchen der zu überwindende Widerstand unmittelbar ergreift, der Lastpunkt.

Derjenige Widerstand, dessen Ueberwindung Zweck der Maschine ist, heißt die Nutzlast; der Inbegriff aller übrigen unvermeidlichen Nebenhindernisse, als Reibung u. s. w. heißt die Nebenlast.

Denkt man sich am Kraftpunkt eine Last q, welche der Kraft eben so widersteht, als wie die am Lastpunkt wirkende Nutzlast Q, so heißt q die reducirte Nutzlast. Eben so erklärt sich, was man unter der reducirten Nebenlast zu verstehen hat. Die Summe beider heißt die reducirte Totallast.

Ist eine Maschine in eine solche Bewegung versetzt, daß sie, so lange diese Bewegung durch die

Einwirkung der Kraft fortdauert, ihre Verrichtung immer in einer und derselben Zeitperiode widerholt, so ist sie im **Beharrungszustand.**

Der Beharrungszustand heißt **gleichförmig** oder **ungleichförmig**, je nachdem die Bewegung der einzelnen Punkte der Maschine, während jeder solchen Periode, gleichförmig oder ungleichförmig ist.

Ist bei einer, schon im Beharrungszustand befindlichen Maschine, die reducirte Totallast der Kraft gleich, so bleibt dieselbe vermöge des Beharrungsvermögens fortwährend in dieser Bewegung so lange Kraft und Last unverändert bleiben; die Maschine befindet sich dann also in einem gleichförmigen Beharrungszustand. Ist aber der Unterschied zwischen der Kraft und reducirten Totallast bald positiv bald negativ, jedoch immer mit gleichen Zwischenräumen, so daß sich der vorige Zustand jedesmal wieder erzeugt, so ist die Maschine in einem ungleichförmigen Beharrungszustand. Als bewegende Kraft wirkt in solchen Fällen die bald positive, bald wieder negative Differenz der Kraft und reducirten Totallast.

Wirkt bei irgend einer Maschine der Widerstand an einer besonderen Umdrehungsachse, die Kraft auch an einer besondern, und finden nun außer diesen beiden Umdrehungsachsen noch eine oder mehrere statt, wodurch die Kraft mit dem Widerstand in Verbindung gesetzt wird, so heißt dieses Verbindungs-Mittel, ein **Vorgelege.** Ein Vorgelege heißt **stehend** oder **liegend**, je nachdem seine

seine Welle sich in verticaler oder horizontaler Lage befindet.

Umlaufs-Massen, die blos zur Vergrößerung der Schwung-Bewegung bei Maschinen, welche einen ungleichförmigen Beharrungsstand haben, angebracht werden, heißen nach Verschiedenheit ihrer Gestalt, Schwungkolben, Schwungscheiben, Schwungringe.

Ein, unter zwei rechten Winkeln gebogenes Stück Eisen in der Achse einer Welle befestigt, um ihre Umdrehung vermittelst einer angebrachten Kraft hervorzubringen, oder um durch die schon bestehende Drehung, der Last eine bestimmte Bewegung mitzutheilen, heißt im ersten Fall, Kurbel, im zweiten Krummzapfen.

§. 274.

Lehrsatz.

Die Effecte zweier Maschinen verhalten sich wie die mechanischen Momente ihrer Lasten.

Beweis.

Die Wirkung einer Maschine ist desto größer, je größer die Last ist, die sie überwindet, und je größer die Geschwindigkeit ist, mit welcher der Widerstand überwunden wird. Das Produkt aus der Last in ihre Geschwindigkeit, d. h. das mechanische Moment der Last ist folglich die Verhältnißzahl der Größe des Effects.

§. 275.

Erklärung.

Man unterscheide Nutz-Effect, Neben-Effect, und Total-Effect. Unter Nutz-Effect

verstehe man das mechanische Moment der reducirten Nutzlast; unter Neben-Effect das der gesammten reducirten Nebenlast; unter Total-Effect die Summe beider.

Eine Maschine ist hiernach also desto vorzüglicher; je größer ihr Nutz-Effect in Beziehung auf den Total-Effect ist.

§. 276.

Zusatz.

Bei einer Maschine im gleichförmigen Beharrungszustand ist also das mechanische Moment der Kraft dem Total-Effect gleich. So ist: beim oberschlächtigen Wasserrad nach §. 240 die Verhältnißzahl des Total-Effects

$$= r . M;$$

beim unterschlächtigen im geraden Gerinne ist nach §. 242 der größtmöglichste Total-Effect

$$= \tfrac{1}{2} h M \gamma,$$

also die Verhältnißzahl desselben

$$= h M.$$

§. 277.

Erklärung.

Die Größe Q einer Last, welche ein belebtes Geschöpf durch seine Nervenkraft ruhend erhalten kann, heißt die absolute Kraft dieses Thieres. Die Größe C der Geschwindigkeit, womit dasselbe, bei ebenderselben Kraft-Anstrengung, wenn ihm gar kein weiteres Hinderniß entgegenwirkt, sich fortbewegen kann, heißt seine absolute Geschwindigkeit.

Die Grösse q der Last welche dasselbe mit der Geschwindigkeit c, bei ebenderselben Kraft-Anstrengung im Gleichgewicht erhalten kann, heißt seine relative Kraft, der relativen Geschwindigkeit c zugehörig.

Den Erfahrungen gemäß soll beiläufig

$$q = \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2 . Q \text{ sein.}$$

§. 278.

Aufgabe.

Es sei Q und C bekannt; man soll durch Q und C diejenigen Werthe für q und c bestimmen, für welche bei Voraussetzung der Allgemeingültigkeit der im vorigen §. angegebenen Formel das mechanische Moment des Geschöpfes, also auch der Total-Effect jeder durch solche Geschöpfe bewegten Maschine, ein Maximum wird.

Auflösung.

Es ist der Total-Effect oder

$$qc = \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2 . Q . c \text{ und } \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2 . c$$

wird ein Maximum für

$$c = \tfrac{1}{3} C; \text{ also}$$
$$q = \tfrac{4}{9} Q.$$

§. 279.

Züsatz.

Nach angestellten Versuchen hat man für den vortheilhaftesten Effect bei thierischen Kräften folgende Erfahrungen gesammlet. (S. Langsdorfs mechanische Wissenschaften p. 347.)

Geschöpfe.	Relative, vortheilhaft. Kraft in Pfunden.	Zugehörige relative Geschwindigkeit in Fußen.	Gewicht in Pfunden.	Schiefe Stellung gegen den Horizont in Graden statt einer Last.
Mensch	25 bis 30	2 bis $2\frac{1}{4}$	120 bis 150	20
Esel	36 — 40	2 — $2\frac{1}{2}$	220 — 300	22
Maulthier	80 — 120	3 — $3\frac{1}{2}$	450 — 600	22
Ochs	200 — 250	$1\frac{1}{3}$ — $1\frac{3}{4}$	500 — 800	23
Pferd	175 — 225	$3\frac{3}{4}$ — $4\frac{1}{4}$	600 — 850	20

§. 280.

Lehrsatz.

Jede durch eine relative Kraft in Bewegung gesetzte Maschine, bei welcher die reducirte Total-

last Q, so wie die auf den Kraftpunkt reducirte Masse M, unveränderliche Größen sind, muß nothwendig einen gleichförmigen Beharrungszustand annehmen.

Beweis.

Die, der thätigen Kraft zugehörige, absolute Größe sei $= P$; ihre absolute Geschwindigkeit $= C$; für irgend eine relative Geschwindigkeit c sei die Größe der relativen Kraft $= Fc$, so daß also $F = P$ und $FC = 0$ ist.

Wenn nun die jetzt noch still stehende Maschine von der Kraft ergriffen und, der Voraussetzung nach, in Bewegung gesetzt wird, so ist im ersten Augenblick die Kraft $= P$; die Ueberwucht $P - Q$ setzt also die Masse M in Bewegung, und diese Bewegung müßte eine gleichförmig beschleunigte werden, wenn $P - Q$ unveränderlich bliebe; weil aber, so wie die Bewegung begonnen hat, und irgend eine Geschwindigkeit c erreicht ist, dann die Einwirkung der Kraft kleiner wird, nemlich nur noch $= Fc$ ist, so ist auch die Ueberwucht $Fc - Q$ veränderlich, und die Bewegung ist also anfänglich ungleichförmig beschleunigt. Da nun aber $F = P$; also $F > Q$ und $FC = 0$; also $FC < Q$ ist, so muß eine zwischen 0 und C fallende Geschwindigkeit x existiren, für welche $Fx = Q$ ist. In dem Augenblick also, in welchem der Kraftpunkt die Geschwindigkeit x erreicht hat, tritt ein Gleichgewicht zwischen Kraft und Last ein. Wenn aber ein festes System in Bewegung ist, und die darauf einwirkenden Kräfte sind unter einander im Gleichgewicht,

so bleibt diese Bewegung fortwährend dieselbe. Es muß also auch die Maschine, so lange Kraft, reducirte Last und Masse dieselben bleiben, nun fortwährend die Geschwindigkeit x im Kraftpunkt beibehalten, für welche $Fx = Q$ ist, und von diesen Augenblick an, tritt der gleichförmige Beharrungszustand ein.

§. 281.

Zusatz.

Aus dem vorigen §. ergiebt sich, daß es bei Anordnung einer Maschine, wenn nicht besondere Bedingungen entgegen stehen, immer möglich ist, die Einrichtung so zu treffen, daß der Kraftpunkt für den Beharrungszustand, diejenige Geschwindigkeit annimmt, für welche der Total-Effect am größten wird.

Wird nemlich, bei der Bezeichnung wie im vorigen §. der Total-Effect ein Maximum, wenn die Geschwindigkeit des Kraftpunkts $= v$ ist, so muß die Gleichung

$$Fv = Q$$

erfüllt werden.

Ist z. B. bei einem unterschlächtigen Wasserrad im geraden Gerinne, die Geschwindigkeit, womit das Wasser die Schaufeln normal trift $= c$; die ankommende Wasser-Menge in jeder Secunde $= M$; die reducirte Totallast $= Q$, so wird nach §. 242 das mechanische Moment der Kraft, also der Total-Effect ein Maximum, wenn die Geschwindigkeit v der Schaufeln $= \frac{1}{2}c$ ist, und man hat folglich die Bedingungs-Gleichung

$$F\tfrac{1}{2}c = \frac{c - \frac{1}{2}c}{2g} M\gamma = Q \text{ oder}$$

$$\frac{cM\gamma}{4g} = Q$$

woraus, wenn M gegeben ist, Q; wenn Q gegeben ist, M; entwickelt werden kann.

Zweites Kapitel.

Anordnungen und Kraft-Bestimmungen für solche Maschinen, bei welchen der Beharrungszustand gleichförmig ist.

---

§. 282.

Aufgabe.

Den allgemeinen Gang der Anordnung und Kraft-Bestimmung für Maschinen in gleichförmigen Beharrungszustand anzugeben.

Auflösung.

Die Anordnung muß so erfolgen, daß auf eine einfache Weise aus der entweder willkührlich gegebenen, oder dem größten Total-Effect entsprechenden Geschwindigkeit des Kraftpunktes, die erforderliche Geschwindigkeit des Lastpunktes entspringe.

Ist die Anordnung getroffen, so setze man die reducirte Totallast dem Ausdruck gleich, welcher die Größe der relativen Kraft für die gewählte oder festgesetzte Geschwindigkeit des Kraftpunktes angiebt, und entwickle das zu bestimmende aus dieser Gleichung.

§. 283.

Beispiele.

I. Man soll durch Pferde eine Last von 1200 ℔ in einer Minute auf 100 Fuß Höhe haben. Die hierzu erforderliche Maschine anzuordnen und die Anzahl der nöthigen Pferde zu bestimmen.

Auflösung.

A. Anordnung.

Es ist die festgesetzte Geschwindigkeit der Last $= \frac{100}{60} = \frac{5}{3}$ Fuß; die der Kraft, für den vortheilhaftesten Effect $= 4$ Fuß; die Anordnung muß also so getroffen werden, daß aus 4 Fuß Geschwindigkeit des Kraftpunktes, für den Lastpunkt eine Geschwindigkeit von $\frac{5}{3}$ Fuß entstehe.

Durch eine leichte Schätzung ergiebt sich die in *Fig.* 68 dargestellte Maschine als ausführbar, und es ist nur noch nöthig ihre Abmessungen, der obigen Bedingung gemäß, zu bestimmen.

Es bezeichne R den Halbmesser des Zugbaums; a den des Kammrades an der stehenden Welle; b den des Getriebes; r den Halbmesser der horizontalen Welle, an welcher sich das Seil, woran die Last hängt, aufwickelt; v die Geschwindigkeit vom Kamm des Kammrades oder Triebstock des Getriebes, so verhält sich, nach eingetretenem Beharrungszustand

$$4 : v = R : a \text{ und}$$

$$v : \tfrac{5}{3} = b : r; \text{ daher muß}$$

$$12 : 5 = bR : ar, \text{ oder}$$
$$\frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a} = \tfrac{12}{5} \text{ werden.}$$

Die Größen R, r, b, a sind also nun so zu wählen, daß dieser Gleichung

$$\frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a} = \tfrac{12}{5}$$

Genüge geschieht, und eine ausführbare Construction damit zusammen hängt.

Man kann R = 16 Fuß; r = 1 Fuß wählen, dann wird

$$\frac{b}{a} = \tfrac{3}{20}$$

und das Kammrad kann 60 Kämme das Getriebe 9 Stöcke erhalten; bei $4\frac{1}{2}$ Zoll Theilung ist dann

$$a = 43 \text{ Zoll}$$
$$b = 6\tfrac{9}{20} \text{ Zoll.}$$

B. Kraft-Bestimmung.

Ist der Durchmesser des Seils $= 1''$; das Gewicht der horizontalen Welle nebst Zubehör = 600 ℔; der Halbmesser ihrer Zapfen $= 1\frac{1}{2}''$; der Reibungs-Coefficient für Zapfenreibung $= \frac{1}{6}$; die erforderliche Kraft am Triebstock = x; so hat man

$$x \cdot \tfrac{129}{20} = 1200 \cdot (12 + \tfrac{1}{2} \cdot 1^2)$$
$$+ \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{x^2 + (1200 + 600)^2}$$

und hieraus

$$x = 2440 \text{ ℔.}$$

Wird nun unter y die Kraft verstanden, und hier $\mu = \frac{1}{10}$ gesetzt, so hat man, nach §. 135 Geostatik

$$y = \left(1 + \frac{\frac{1}{10}\pi}{60} \cdot \frac{9+60}{9}\right) \cdot 2440$$
$$= 2537 \text{ ℔}.$$

Setzt man nun ferner das Gewicht der stehenden Welle nebst Zubehör = 2000 ℔; die Halbmesser der Zapfen = 1″; μ für gleitende Reibung = $\frac{1}{5}$; und die erforderliche Kraft = P; so hat man, ohne Rücksicht auf die nicht bedeutende von der Wirkung der Pferde herrührende Reibung

$$P \cdot 192 = 2537 \cdot 43 + \tfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2537 + \tfrac{2}{3} \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot 2000$$

und hieraus

$$P = 572 \text{ ℔}.$$

Es sind also 3 Pferde erforderlich.

Anm. Bei Maschinen, welche durch thierische Kräfte betrieben werden, ist es gewöhnlich hinreichend, blos die Nutzlast in Rechnung zu bringen; dann entsteht hier

$$P \cdot 4 - 1200 \cdot \tfrac{5}{3} = 0;$$

und hieraus

$$P = 500 \text{ ℔}.$$

II. Man hat 4 Fuß nutzbares Gefälle, und hinreichendes Wasser. Es soll eine unterschlächtige Mehlmühle für ein gerades Gerinne, mit liegenden Vorgelege und 2 Gängen angeordnet werden, dergestalt, daß jeder Läufer in der Minute 180 Umdrehungen mache. Die Vorrichtung und die erforliche Wasser-Menge M zu bestimmen.

Auflösung.

A. Anordnung.

Die Geschwindigkeit c, womit das Wasser die Schaufeln trift, ist

$$= \alpha \sqrt{h} = 6{,}42 \,.\, \sqrt{4} = 12{,}84 \text{ Fuß},$$

und folglich die vortheilhafteste Geschwindigkeit v für die Schaufeln

$$= \tfrac{1}{2} c = 6{,}42 \text{ Fuß}.$$

Nun ist ferner die Geschwindigkeit in der Peripherie der Getriebe an den Mühleisen, der Bedingung zufolge, wenn f den Halbmesser dieser Getriebe bezeichnet

$$= \frac{180 \,.\, 2f \,.\, \pi}{60} = 6\pi f \text{ Fuße},$$

und es müssen also die Abmessungen des Räderwerks so bestimmt werden, daß aus 6,42 als Geschwindigkeit des Kraftpunktes, die Geschwindigkeit $6\pi f$ für die Peripherie der Getriebe entspringe.

Es bezeichne *(Fig. 69.)*

R den Halbmesser des Wasserrades;
a den des Stirnrades;
b den des Trillings;
e den des Kammrades;
w die Geschwindigkeit in der Peripherie des Stirnrades, so hat man

$$6{,}42 : w = R : a$$

$$w : 6\pi f = b : e; \text{ folglich muß}$$

$$6{,}42 : 6\pi f = bR : ae; \text{ oder}$$

$$\frac{6\pi}{6{,}42} \,.\, R = \frac{a}{b} \,.\, \frac{e}{f} \text{ werden.}$$

Dieser Bedingungs-Gleichung entsprechen folgende ausführbare Werthe

$$R = 8\tfrac{1}{2}\ \text{Fuß}$$
$$a : b = 56 : 15;$$
$$e : f = 20 : 3;$$

man kann also dem Stirnrad 112 Kämme
dem Trilling 30 Stöcke
dem Kammrad 60 Kämme
dem Getriebe 9 Stöcke

geben; dann ist, bei 4″ Theilung, hinreichend genau, in Beziehung auf die Kraftberechnung

$$a = 71\ \text{Zoll}$$
$$b = 19\ \text{Zoll}$$
$$e = 38\ \text{Zoll}$$
$$f = 5\tfrac{3}{4}\ \text{Zoll}.$$

B. Wasser-Mengen Bestimmung.

Bezeichnet n die Anzahl Umläufe jedes Läufers in einer Minute; r den Halbmesser jedes Läufers; β den des Läufer Auges; w die Geschwindigkeit der Peripherie der Läufer, so hat man, nach Eytelweins Bestimmung, alle Abmessungen in Fußen verstanden, den Widerstand des Getreides, in die Peripherie des Läufers reducirt

$$= 0{,}2044 \cdot n \cdot \frac{r^3 - \beta^3}{r}\ \text{℔ oder}$$

$$= 1{,}952 \cdot w \cdot \frac{r^3 - \beta^3}{r^2}\ \text{℔}.$$

Nimmt man hier $r = 2'$; $\beta = \frac{1}{4}'$ an, so ergiebt sich dieser Widerstand

$$= 144\ \text{℔}.$$

Wird nun die erforderliche Kraft in der Pe-

ripherie jedes Getriebes $= z$, das Gewicht jedes Mühleisens nebst Zubehör $= 540$ ℔, der Halbmesser des Zapfen $= \frac{1}{3}$ Zoll, $\mu = \frac{1}{9}$ angenommen, so ist hinreichend genau

$$z \cdot \frac{23}{4} = 144 \cdot 24 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot 540$$

und hieraus

$$z = 603 \text{ ℔}.$$

Ferner ist, wie in I die erforderliche Kraft, im Kamm in jedes Kammrades, oder

$$y = \left(1 + \frac{\frac{1}{10}\pi}{60} \cdot \frac{9 + 60}{9}\right) \cdot 603$$
$$= 627 \text{ ℔}.$$

Bezeichnet nun x die nöthige Kraft im Triebstock jedes Trillings; ist 1500 ℔ das Gewicht jeder horizontalen Welle nebst Zubehör, der Halbmesser der Zapfen $= \frac{5}{4}''$; $\mu = \frac{1}{8}$; so ist im Mittel für jede der beiden horizontalen Wellen

$$x \cdot 19 = 627 \cdot 38 + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt{1500^2 + 603^2}$$

und hieraus

$$x = 1272 \text{ ℔}.$$

Die erforderliche Kraft x' im Kamm des Stirnrades für jede der horizontalen Wellen ist demnach

$$= \left(1 + \frac{\frac{1}{10}\pi}{112} \cdot \frac{112 + 30}{30}\right) \cdot 1272; \text{ oder}$$

$$x' = 1289 \text{ ℔}.$$

Endlich ist, wenn man die nöthige relative Kraft aufs Wasserrad durch P ausdrückt, das Gewicht der Wasserrads-Welle nebst Zubehör $= 3600$ ℔, die Halbmesser der Zapfen der Wasserrads-Welle $= 2''$; $\mu = \frac{1}{8}$ setzt,

$$P \,.\, 102 = 2 \,.\, 1289 \,.\, 71 + \tfrac{1}{6} \,.\, 2 \,.\, \sqrt{3600^2 + P^2}$$

und hieraus, genau genug

$$P = 1808 \text{ ℔}.$$

folglich, nach §. 241

$$\frac{12{,}84 - 6{,}42}{2 \,.\, \frac{125}{8}} \,.\, M \,.\, 66 = 1808$$

und hieraus

M = 134 Cubic-Fuß beinahe.

Rechnet man, wegen des Wasserverlusts im Spielraum zwischen Schaufel und Gerinne gerade 140 Cubic-Fuß, so ist der erforderliche Querschnitt der getroffenen Schaufel beinahe = 11 Quadrat-Fuß, so daß bei 11 Fuß Breite der Schaufeln im Lichten und der Schutz-Oeffnung, die Schütze eine Oeffnung von 1 Fuß Höhe erhalten muß.

III. Durch ein oberschlächtiges Wasserrad, von 12 Fuß Durchmesser im Theilriß, auf welches in jeder Secunde 10 Cubic-Fuß Wasser normal, mit 6 Fuß Geschwindigkeit stürzen, ein Druckwerk zu betreiben, welches das Wasser auf eine lothrechte Höhe von 200 Fuß fördert. Das Wasserrad soll dieselbe Geschwindigkeit wie das einstürzende Wasser erhalten, und diesen Bedingungen gemäß, die Anordnung getroffen, und die in jeder Minute zu fördernde Wasser-Menge M bestimmt werden.

Auflösung.

Die Anordnung der Maschine bei Auflösung dieser Aufgabe kann nicht wohl anders als durch Anwendung eines Krummzapfens oder eine ähnliche

Vorrichtung erfolgen, und in so ferne gehört die Auflösung dieser Aufgabe in ein später erst folgendes Kapitel, indem bei einem Krummzapfen die Last ein veränderliches Moment erhält, also auch die reducirte Last veränderlich ist, folglich ein ungleichförmiger Beharrungszustand eintreten wird. Indessen kann doch eine näherungsweise Bestimmung statt finden, und da eine solche für praktische Ausführung oft hinreichend ist, so soll sie hier vorgenommen werden.

Man mache einen Versuch mit der in *Fig.* 70 dargestellten Maschine, wo an der Wasserrads-Welle A ein Krummzapfen angebracht ist, durch welchen, vermittelst Stangen EF, Hebebäume FG um G gehoben und niedergedrückt werden, an welchen die Kolbenstangen KN hängen.

Bezeichnet nun n die Anzahl Paare der Druckpumpen; D den Durchmesser der Stiefel, A den Querschnitt derselben, b den Kolbenhub, so ist nach §. 271 der Widerstand näherungsweise

$$= n \,.\, \frac{10\,D + 1}{10\,D} \,.\, A\,(200 + b) \,.\, 66$$

oder, $\frac{1}{4} D^2 \pi$ für A geschrieben,

$$= n\, \frac{10\,D + 1}{40}\, D\pi\,(200 + b) \,.\, 66.$$

Bezeichnet man ferner den Hebelsarm KG mit e, den FG mit a so ist der in die Stange FE reducirte Widerstand

$$= \frac{e}{a} \,.\, n \,.\, \frac{10\,D + 1}{40}\, D\pi\,(200 + b)\, 66.$$

Es ist aber die Kraft in der Peripherie des Wasserrades, nach §. 240

$$= \tfrac{5}{3} . 6 . \tfrac{10}{6} . 66 = 1100 \text{ ℔}$$

und wenn der Halbmesser des Krummzapfens durch r ausgedrückt wird, so ist $b = \frac{e}{a} . 2r$, und es durchläuft die Kraft 1100 den Weg 6π in eben der Zeit in welcher der Widerstand in EF den Weg 2r zurücklegt; folglich ist

$$1100 . 6\pi = \frac{e}{a} . n \frac{10D + 1}{40} D\pi (200 + \frac{e}{a} . 2r) 66 . 2r$$

oder

$$2000 = \frac{e}{a} . n . (10D + 1) D . (200 + \frac{e}{a} . 2r) . r.$$

Setzt man, um eine ohngefähre Schätzung zu erhalten,

$$D = 8'' = \tfrac{2'}{3}; \quad \frac{e}{a} = \tfrac{2}{3}; \quad r = 18'' = \tfrac{3'}{2};$$

so ergiebt sich

$$n = \tfrac{4500}{2323}$$

und es läßt sich übersehen daß bei der angenommenen Vorrichtung eine ausführbare, der Aufgabe entsprechende Anordnung bestimmbar ist, wenn man

$$D = 8'' = \tfrac{2}{3} \text{ Fuß}$$
$$n = 2$$
$$r = \tfrac{3}{2} \text{ Fuß}$$

annimmt, und $\frac{e}{a}$ nun genauer, mit Rücksicht auf die vorzüglichsten Nebenhindernisse bestimmt.

Bei der Bezeichnung wie in §. 266 sei hier $l = 600$ Fuß; $d = 4''$; also der zugehörige Querschnitt

schnitt $a = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \pi$; $\alpha = 6{,}42$; $\mu = \frac{1}{10}$; ferner ist, der Aufgabe und den schon erfolgten Bestimmungen gemäß

$$H = 200 \text{ Fuß}$$
$$n = 2$$
$$r = \tfrac{3}{2} \text{ Fuß}$$
$$D = \tfrac{2}{3} \text{ Fuß; also}$$
$$A = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{4}{9} \cdot \pi; \text{ dann}$$
$$b = \frac{e}{a} \cdot 3 \text{ Fuß;}$$

die Zeit eines Kolbenhubs

$$= \frac{6\pi}{6} = \pi \text{ Sec.}$$

folglich, als Mittelwerth

$$w = \frac{\frac{a}{e} \cdot 3}{\pi}$$

wofür $\frac{e}{a}$ gesetzt werden kann.

Ist nun ein Windkessel angebracht, so hat man, nach §. 266

$$P' = \left[200 + \left(\frac{e}{a} \cdot 4\right)^2 \left(\frac{1}{6{,}42^2} + \frac{600}{2006 \cdot \frac{1}{3}}\right) + \frac{200}{10 \cdot \frac{2}{3}}\right] \tfrac{1}{9}\pi \cdot 66$$
$$= 5300 + 345{,}8 \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^2$$

und nach §. 268

$$P'' = \left[\frac{e}{a} \cdot 3 + \left(\frac{e}{a}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{4}{6{,}42}\right)^2 + \frac{\frac{e}{a} \cdot 3}{2006 \cdot \frac{2}{3}}\right] + \frac{\frac{e}{a} \cdot 3}{10 \cdot \frac{2}{3}}\right] \tfrac{1}{9}\pi \cdot 66$$

oder, in dem Ausdruck

$$\frac{\frac{e}{a} \cdot 3}{2006 \cdot \frac{2}{3}},$$

um eine höhere Gleichung zu vermeiden, für $\frac{e}{a}$ den Näherungswerth $\frac{2}{3}$ gesetzt,

$$P'' = 80 \cdot \frac{e}{a} + 9{,}2 \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^2$$

folglich (§. 270)

$$P = 5300 + 80 \cdot \frac{e}{a} + 355 \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^2$$

daher, ohne Rücksicht auf die Reibung in G, welche von geringen Einfluß ist, der gesammte Widerstand in den Stangen FE

$$= \frac{e}{a} \cdot 2P$$

$$= 2 \cdot \frac{e}{a} \cdot \left[5300 + 80 \frac{e}{a} + 355 \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^2\right].$$

Wird ferner das Gewicht des Wasserrades, nebst Welle und Zubehör = 4000 ℔ angenommen, der Halbmesser der Zapfen der Welle = 2″ festgesetzt, und nur die aus dem Gewicht 4000 und der Kraft entspringende Reibung für $\mu = \frac{1}{6}$ in Rechnung gebracht, so ergiebt sich, weil die Kraft in der Peripherie des Wasserrades = 1100 ℔ ist, nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$1100 \cdot 6 \cdot \pi = 2 \cdot \frac{e}{a}\left[5300 + 80 \cdot \frac{e}{a} + 355 \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^2\right] \cdot 3 + 5100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\pi$$

und hieraus

$$355 \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^3 + 80 \left(\frac{e}{a}\right)^2 + 5300 \cdot \frac{e}{a} = 3382$$

aus welcher Gleichung, hinreichend scharf

$$\frac{e}{a} = 0{,}617 \text{ hervorgeht.}$$

Man kann folglich $a = 16$ Fuß nehmen, dann wird $e = 9' \; 10\frac{1}{2}''$.

Es ist also nun

$$w = 0{,}617 \cdot \frac{3}{\pi} \text{ beinahe } = 0{,}59 \text{ Fuß,}$$

folglich nach §. 270

$$M = n \cdot 54 \cdot A \cdot w \text{ oder hier}$$

$$M = 2 \cdot 54 \cdot \tfrac{1}{9}\pi \cdot \frac{0{,}617 \cdot 3}{\pi}$$

$$= 22\tfrac{1}{5} \text{ Cubic-Fuß.}$$

Drittes Kapitel.

Von denjenigen Maschinen bei welchen der Beharrungszustand dadurch ungleichförmig ist, daß von Zeit zu Zeit Massen aufs neue, aus Ruhe in Bewegung zu versetzen sind.

---

§. 284.

Aufgabe.

Bei einer hierher gehörigen Maschine sei das Moment der Kraft, so wie das der Last als unveränderlich anzusehen, und es bezeichne

Q die auf den Lastpunkt m reducirte als unveränderlich anzusehende **Totallast**;

M die in beständiger Bewegung bleibende ebenfalls auf m reducirte Masse;

W diejenige, auf m reducirte Masse, welche jedesmal nach

t Secunden aufs neue aus der Ruhe in Bewegung versetzt werden muß, **und dann während den folgenden t Secunden in Bewegung bleibt**;

b den Weg des Lastpunkts m während der Zeit t;

P die erforderliche Kraft im Kraftpunkt n;

B den Weg des Kraftpunktes n in der Zeit t.

Man soll durch Q, M, W, t, b, B denjenigen Werth bestimmen, welchen P haben muß, damit ein (ungleichförmiger) Beharrungszustand eintritt.

Auflösung.

Versteht man unter v diejenige Geschwindigkeit, welche der Lastpunkt m in dem Augenblick hat, wo W ergriffen ist; unter c diejenige, welche dieser Punkt m, t Secunden später, also in dem Augenblick haben wird, wo dies W zur Ruhe übergeht, so muß, wenn, wie erforderlich ist, ein Beharrungszustand statt finden soll, in dem nächstfolgenden Augenblick, in welchem wieder eine Masse W aus Ruhe in Bewegung versetzt ist, die Geschwindigkeit des Punktes m abermals = v sein. Der Geschwindigkeits-Uebergang von dem größeren c zu dem kleineren v muß also in dem Augenblick erfolgen, in welchen ein W aus Ruhe in Bewe-

gung versetzt wird. Die, diese Bedingung aussprechende Gleichung ist: da in dem Augenblick, ehe W ergriffen ist, nur die Masse M; in dem nächstfolgenden aber, wo W schon ergriffen ist, die Masse M + W in Bewegung ist, nach §. 116, harte Massen angenommen,

$$1)\quad Mc = (M + W)\,v.$$

Ferner muß, der Geschwindigkeits-Uebergang von dem kleineren v zu dem größeren c, in der Zeit t erfolgen und es muß daher P so groß sein, daß in dieser Zeit t, vermöge der, während derselben wirkenden Beschleunigung, welche G heißen mag, aus der Geschwindigkeit v des Lastpunktes m die c erwächst, und zugleich muß dieser Punkt m während dieser Zeit t den Weg b zurücklegen. Die, diese Bedingungen aussprechenden Gleichungen, sind nach §. 68

$$2)\quad c = v + 2Gt.$$

$$3)\quad b = vt + Gt^2.$$

Es ist aber die auf den Lastpunkt reducirte Kraft $= P.\frac{B}{b}$, und es muß, wenn die Maschine in dem Augenblick, wo W ergriffen ist, nicht stille stehen soll, $P.\frac{B}{b}$ nothwendig größer wie Q sein. Der Ueberschuß $P\frac{B}{b} - Q$ ist dann die bewegende Kraft, welche der Masse M + W während der Zeit t den Geschwindigkeits-Zuwachs c — v mittheilt. Nach §. 65 ist also

$$4)\quad G = g\,\frac{P\,.\,\frac{B}{b} - Q}{M + W}.$$

Aus der Verbindung der 4 hergeleiteten Gleichungen, entsteht, wenn man c, v und G eliminirt, und P entwickelt

$$P = \frac{b}{B}\left[Q + \frac{bW(M+W)}{gt^2\,.\,(2M+W)}\right].$$

§. 285.

Zusatz.

Wäre W nicht vorhanden, so daß also ein gleichförmiger Beharrungszustand statt fände, so hätte man

$$P = \frac{b}{B}\,Q.$$

Die Ungleichförmigkeit hat also den nachtheiligen Einfluß, daß noch eine Ueberwucht

$$V = \frac{b}{B}\,.\,\frac{bW(M+W)}{gt^2\,.\,(2M+W)}$$

erforderlich ist, wenn die Maschine nicht ins Stocken gerathen soll.

§. 286.

Zusatz.

Man denke sich unter W einen bestimmten Werth, so wird, wenn M gegen W sehr groß ist, so daß $\frac{W}{M}$ als Null betrachtet werden kann

$$\frac{M+W}{2M+W} \text{ oder } \frac{1+\frac{W}{M}}{2+\frac{W}{M}} \text{ gleich } \frac{1}{2}$$

zu setzen sein, und für solche Fälle ist also die Ueberwucht

$$V = \frac{1}{2}\frac{b^2 W}{B g t^2}.$$

Ist aber M gegen W sehr klein, so daß $\frac{M}{W}$ als unbedeutend erscheint, so ist

$$\frac{M+W}{2M+W} \text{ oder } \frac{\frac{M}{W}+1}{\frac{2M}{W}+1} \text{ gleich } 1$$

zu setzen, und also für solche Fälle die Ueberwucht

$$V = \frac{b^2 . W}{B . gt^2} \text{ anzunehmen.}$$

Es kann folglich, für einen bestimmten Werth von W, die Ueberwucht V durch Vergrößerung von M vermindert werden, doch nie um mehr, als die Hälfte.

Die Vergrößerung von M erfolgt durch Anbringung einer bloßen Schwung-Masse, und ob es nun gleich den Anschein hat, diese müsse so groß als möglich gemacht werden, um V dem Werth

$$\frac{1}{2}\frac{b^2 W}{Bgt^2}$$

so nahe als möglich zu bringen, also P so klein als möglich zu erhalten, so ist dies doch deswegen nicht ganz der Fall, weil mit der Vergrößerung von M, zugleich die Reibung, also auch Q wächst,

wodurch wieder eine Vergrößerung von P nöthig wird. Es muß also einen Werth für M geben, welcher P zu einem Minimum macht.

§. 287.

Aufgabe.

Man soll an einer hierher gehörigen Maschine einen Schwungring anbringen, und die Breite desselben der Bedingung gemäß bestimmen, daß P ein Minimum wird.

Auflösung.

An irgend einer in beständiger Drehung bleibenden Welle der Maschine, denke man sich einen Schwungring, von den Halbmessern R; r und der Breite x; das Gewicht eines Cubic-Fußes seiner Materie sei $= p$; die Halbmesser der Zapfen der erwähnten Welle $= \varrho$, und h bezeichne den Weg, welchen die Peripherie $2R\pi$ in der Zeit t (§. 284) zurücklegt, so ist (ohne Berücksichtigung der Arme) die Masse des Schwungrings in die Peripherie $2R\pi$ reducirt nach §. 136

$$= \pi x p (R^2 - r^2) \frac{R^2 + r^2}{2R^2}$$

also auf den Lastpunkt m reducirt,

$$= \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{(R^4 - r^4)\pi p}{2R^2} \cdot x$$

oder, $\frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{(R^4 - r^4)\pi p}{2R^2}$ durch D ausgedrückt

$$= D \cdot x.$$

folglich, wenn M die übrige in beständiger Bewegung bleibende, auf den Lastpunkt m reducirte Masse bezeichnet; die gesammte auf m reducirte Masse,

$$= M + Dx.$$

Nun ist ferner, das hinzukommende, Reibung erzeugende, Gewicht,

$$= (R^2 - r^2)\pi x . p$$

folglich die hinzukommende Reibung

$$= \mu\pi p (R^2 - r^2)x$$

und dieser Widerstand in die Peripherie $2R\pi$ reducirt

$$= \frac{\varrho}{R}\mu\pi p (R^2 - r^2) x$$

folglich, derselbe, in den Lastpunkt m reducirt

$$= \frac{h}{b} \cdot \frac{\varrho}{R}\mu\pi p (R^2 - r^2)x$$

oder, $\frac{h}{b} \cdot \frac{\varrho}{R}\mu\pi p (R^2 - r^2)$ durch A ausgedrückt,

$$= A . x.$$

Bezeichnet demnach Q die übrige auf m reducirte Totallast, so ist die gesammte auf m reducirte Totallast,

$$= Q + Ax.$$

Demnach, nach §. 284

$$P = \varphi x = \frac{b}{B}\left[Q + Ax + \frac{bW(W + M + Dx)}{gt^2.(W + 2M + 2Dx)}\right]$$

und dieser Ausdruck wird ein Minimum für

$$x = \frac{-(2M+W)}{2D} + \frac{W}{2t} \cdot \sqrt{\frac{b}{gDA}}.$$

§. 288.

Aufgabe.

Für die hieher gehörigen Maschinen, als Hammerwerke, Stampfwerke, die Bedingungsgleichungen der Anordnung herzuleiten.

Auflösung.

Die zu erfüllenden Bedingungen sind:

1) daß jeder Hammer oder Stampfer die bestimmten Anzahl Schläge in jeder Minute macht;

2) daß kein Hammer oder Stampfer vom nachfolgenden Daumen früher ergriffen wird, bevor er nicht seine Wirkung beendigt hat;

3) daß immer eine und dieselbe Anzahl Hämmer oder Stampfer als Last an der Maschine wirken.

Es bezeichne

N die Anzahl Schläge welche jeder Hammer oder Stampfer in jeder Minute machen soll;

n die Hübigkeit, oder die Anzahl Daumen in einem und denselben Querschnitt der Welle;

r den mechanischen Halbmesser der Daumenwelle, d. h. die unveränderliche Entfernung von der Achse der Welle bis zum Angriffspunkt des Daumen;

w die Geschwindigkeit der Peripherie $2r\pi$;

so ist die Zeit, in welcher die Welle eine Umdre-

hung macht, also die Zeit während welcher n Schläge eines und desselben Hammers oder Stampfers erfolgen

$$=\frac{2r\pi}{w} \text{ Secunden,}$$

und da nun in 60 Secunden N Schläge desselben statt finden sollen, so hat man

$$\frac{2r\pi}{w} : 60 = n : N$$

und hieraus

$$\text{I. } w = \frac{\pi r N}{30 . n}.$$

Bezeichnet nun ferner

H die Größe des Hubs

β den Bogen, in der Peripherie $2r\pi$, welchen der Angriffspunkt des Daumen vom Augenblick des Ergreifens bis zum Augenblick des Verlassens eines und desselben Hammer oder Stampfers durchläuft

(für geschlitzte Stampfer ist $\beta = H$)

so ist $\frac{2r\pi}{n} - \beta$ der Bogen in der Peripherie $2r\pi$ welcher in der Zeit durchlaufen wird, während welcher der Hammer oder Stampfer **fällt und ruht**, und diese Zeit ist folglich

$$\frac{\frac{2r\pi}{n} - \beta}{w}$$

Es ist aber die Zeit in welcher der Hammer oder Stampfer fällt, genau genug

$$= \sqrt{\frac{H}{g}};$$

und folglich muß

$$\frac{\frac{2r\pi}{n} - \beta}{w} > \sqrt{\frac{H}{g}};$$

oder, wenn man aus I den Werth für w setzt

$$30 . \frac{2r\pi - n\beta}{r\pi N} > \sqrt{\frac{H}{g}}; \text{ also}$$

$$\text{II. } N < 30 . \frac{2r\pi - n\beta}{r\pi} . \sqrt{\frac{g}{H}} \text{ sein.}$$

Anmerk. Sind Stoßreitel angebracht, so kann man

$$N = 30 . \frac{2r\pi - n\beta}{r\pi} \sqrt{\frac{g}{H}} \text{ machen.}$$

Versteht man nun noch:

unter m die Anzahl aller Hämmer oder Stampfer überhaupt,

unter μ die Anzahl derer, welche immer zugleich als Last an der Maschine wirken, so muß, bei vorausgesetzter nothwendig gleichförmiger Vertheilung der Daumen, $\frac{\beta}{\mu}$ gleich dem Bogen in der Peripherie $2r\pi$ sein, welcher vom Augenblick des Ergreifens irgend eines Hammers oder Stampfers, bis zum Augenblick des Ergreifens des Nächstfolgenden durchlaufen wird.

Dieser Bogen ist aber auch, weil bei jeder Umdrehung der Welle n . m Hübe erfolgen

$$= \frac{2r\pi}{n.m}; \text{ und daher}$$

$$\frac{\beta}{\mu} = \frac{2r\pi}{n.m}; \text{ oder}$$

$$\text{III. } \frac{n.m.\beta}{r\mu} = 2\pi = 6{,}283\ldots\ldots$$

§. 289.

Zusatz.

Setzt man aus III für $n\beta$ den Werth $\frac{2r\mu\pi}{m}$ in II so erhält man für II die einfacher ausgedrückte Bedingung

$$N < 60\left(1-\frac{\mu}{m}\right)\sqrt{\frac{g}{H}}.$$

§. 290.

Beispiele.

Es sollen vermittelst eines oberschlächtigen Wasserrades von 10 Fuß Durchmesser, auf welches das Wasser mit 10 Fuß Geschwindigkeit tangential einfällt, 2 Schwanz-Hämmer in Bewegung gesetzt werden. Der Hub soll 18″ sein. Die Anordnung zu treffen und die als Kraft erforderliche Wasser-Menge zu bestimmen.

Auflösung.

A. Anordnung.

Hier unmittelbar gegebene Größen sind unter andern

$$m = 2;\ \mu = 1;\ H = \tfrac{3}{2} \text{ Fuß}.$$

Wird nun der Schwanz des Hammers $= a$; der Helm $= b$ Fuß lang gedacht, so ist

$$\beta = \frac{a}{b} . H = \frac{3a}{2b}$$

und man hat die Bedingungsgleichungen

$$1) \quad w = \frac{\pi . r . N}{30 . n}$$

$$2) \quad N < 60 (1 - \tfrac{1}{2}) \sqrt{\frac{15,625}{1,5}}$$

$$3) \quad \frac{a}{b} . \frac{n}{r} = \tfrac{2}{3} \pi.$$

Aus 2, folgt $N < 96,8$; so daß also $N = 96$ werden kann; und dann bleibt

$$w = \frac{32 \pi}{10} . \frac{r}{n} \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} . \frac{n}{r} = \tfrac{2}{3} \pi.$$

Wird nun $r = 15''$ gewählt, so giebt die erste dieser beiden Gleichungen

$$wn = 4 \pi$$

die zweite

$$\frac{a}{b} n = \tfrac{5}{6} \pi$$

und diesen beiden Gleichungen gemäß kann $n = 5$; dann $w = 2,51$ Fuß, wofür $2\frac{1}{2}$ gebraucht werden soll;

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi}{6};$$

also etwa $b = 8'$; $a = 4,2'$ genommen werden.

Wird nun, um zu untersuchen, ob ein Vorgelege erforderlich ist, die Geschwindigkeit der Peripherie des Wasserrades $= v$ gesetzt, so hat man, ohne Vorgelege

$$v : 2\tfrac{1}{2} = 5 : \tfrac{5}{4} \text{ und hieraus}$$
$$v = 10 \text{ Fuß};$$

welche Geschwindigkeit gerade der des aufschlagenden Wassers gleich ist, so daß also wenn man kein Vorgelege anbringt, gerade die, nach §. 240 passendste Geschwindigkeit fürs Wasserrad entspringt.

B. Kraft-Bestimmung.

Bei der Bezeichnung in §. 284 und 288 ist

$$t = \frac{\beta}{w} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\pi}{10};$$

$$b = \beta = w \cdot t = \tfrac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{4};$$

$$B = 10 \cdot \frac{\pi}{10} = \pi.$$

Setzt man nun den Halbmesser der Daumen-Welle = 1 Fuß; das Gewicht dieser Welle nebst Zapfen = 2000 ℔, das, des Wasserrades an und für sich = 800 ℔, so ist diese Masse in den Lastpunkt m, d. h. in den Angriffspunkt des Daumen reducirt, hinreichend genau

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 1^2}{(\frac{5}{4})^2} + \frac{800 \cdot 5^2}{(\frac{5}{4})^2} = 1344\text{o ℔}.$$

Wird ferner die Breite und Dicke des Helms $= 1'$ angenommen, so hat man, bei 13,2 Fuß Länge, seine Masse auf m reducirt = 914 ℔, dann, wenn jeder Hammer 500 ℔ wiegt, die eben dahin reducirte Masse desselben

$$= \frac{500 \cdot 8^2}{4{,}2^2} = 1814.$$

Addirt man hierzu noch das Gewicht des Reifens bei m mit 32 ℔; so hat man also

$$M = 1340 \text{ ℔};$$

$$W = 914 + 1814 + 32 = 2760 \text{ ℔}.$$

Wenn nun die Halbmesser des vielleicht nöthigen Schwungsrings = 36″ und 30″ genommen werden und p = 60 ℔ gesetzt wird, so ist

$$h = \frac{3}{5:4} \cdot \frac{\pi}{4} = \tfrac{3}{5}\pi.$$

Sind ferner die Halbmesser ϱ der Zapfen der Welle = 2″ und wird $\mu = \frac{1}{6}$ gesetzt, so ergiebt sich nach §. 287

$$A = \tfrac{11}{3}\pi$$

$$D = \frac{66 \,.\, 61}{5}\pi$$

und dann $x = -\frac{1}{12}$ Fuß beinahe, woraus hervorgeht, daß kein Schwungring angebracht werden darf, sondern die Maschine schon etwas zu viel Masse hat. Wäre das negative Resultat für x größer, so müßten die Kränze des Wasserrades noch etwas schwächer gemacht werden, da es aber so unbedeutend klein ist, so ist hierauf keine weitere Rücksicht zu nehmen.

Um nun die nöthige Kraft P im Theilriß des Wasserrades zu bestimmen, bezeichne y die erforderliche Thätigkeit im Angriffspunkt vom Schwanz des Hammers, so hat man, die Halbmesser der Zapfen des Helms = 1″; $\mu = \frac{1}{6}$ gesetzt,

$$y \,.\, 4{,}2 = 500 \,.\, 8 + 9 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 60 \,.\, \tfrac{2}{2} - 4{,}2 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 60 \,.\, 2{,}1$$
$$- 32 \,.\, 4{,}2 + (500 + 13{,}2 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 60 + 32 + y) \,.\, \tfrac{1}{6} \,.\, \tfrac{1}{12}$$

und

und hieraus

$$y = 1382 \text{ ℔}.$$

Ist nun für die Reibung zwischen Daumen und Helm $\mu = \frac{1}{9}$, so hat man nach Geostatik §. 136 die erforderliche Kraft im Angriffspunkt der Daumen

$$= \left(1 + \tfrac{1}{9} \cdot \frac{\pi}{5}\right) \cdot 1382 = 1474 \text{ ℔}.$$

Ferner ist die Reibung an den Wellzapfen, eben dahin reducirt

$$= \frac{(2800 + P - 1382) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1418 + P}{45};$$

folglich die reducirte Totallast

$$Q = 1474 + \frac{1418 + P}{45};$$

daher nach §. 284

$$P = \tfrac{1}{4}\left[1474 + \frac{1418 + P}{45} + \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 2760 \cdot 16200}{\frac{125}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \cdot 29640}\right]$$

und hieraus

$$P = 572 \text{ ℔}.$$

Der Theorie des oberschlächtigen Wasserrades zufolge ist nun

$$572 = \tfrac{5}{3} \cdot 5 \cdot \frac{M}{10} \cdot 66$$

folglich die nöthige Wasser-Menge M in jeder Secunde

$$= 10\tfrac{2}{5} \text{ Cubic-Fuß}.$$

Ohne Rücksicht auf die erforderliche Ueberwucht erhält man, aus

$$P = \frac{1}{4} \cdot \left(1474 + \frac{1418 + P}{45}\right);$$

$P = 379$ ℔; und dann

$M = 7$ Cubic-Fuß beinahe.

Viertes Kapitel.

Von denjenigen Maschinen bei welchen der Beharrungszustand dadurch ungleichförmig ist, daß die Last ein veränderliches Moment hat, oder vom Krummzapfen.

---

§. 291.

In meiner Theorie des Krummzapfens, Berlin 1818, Realschulbuchhandlung: findet man die hierher gehörigen Sätze zusammengestellt. Um Wiederholungen zu vermeiden, sollen daher hier blos die Grund-Gleichungen aufgestellt und die dortigen Resultate angegeben werden.

Es bezeichne

r den Halbmesser des Krummzapfens;

W die als unveränderlich anzusehende in die Lenkstange reducirte gesammte Masse der Last;

Q die eben dahin reducirte gesammte Last;

M die unveränderliche in die Peripherie $2r\pi$ reducirte Masse der Krummzapfen Welle nebst Zubehör;

P die eben dahin reducirte für den ungleichförmigen Beharrungszustand erforderliche Kraft;

v die Geschwindigkeit der Warze in dem Augenblick, wo die Last kein Moment hat;

v + c die Geschwindigkeit der Warze nach t Secunden, von dem Augenblick an gerechnet, wo die Geschwindigkeit = v war;

φ den in der Zeit t vom Krummzapfen durchlaufene Winkel in Längen-Maaß, für den Halbmesser = 1 verstanden, also

$r\varphi$ den von der Warze in der Zeit t durchlaufenen Bogen,

so ist im Endpunkt des Bogens $r\varphi$ die Ueberwucht

$$= P - Q \operatorname{Sin} \varphi;$$

und die Masse

$$= M + W \operatorname{Sin} \varphi^2;$$

folglich die beschleunigende Kraft

$$= \frac{P - Q \operatorname{Sin} \varphi}{M + W \operatorname{Sin} \varphi^2};$$

daher nach §. 82

$$v + c = \sqrt{4g \int \frac{P - Q \operatorname{Sin} \varphi}{M + W \operatorname{Sin} \varphi^2} . d(r\varphi)}.$$

Wird nun

I. W unberücksichtigt gelassen, oder W = 0 gesetzt, so erhält man

$$(v + c)^2 = \frac{4rg}{M}(P\varphi + Q \operatorname{Cos} \varphi) + \text{Const}$$

also, weil für $\varphi = 0$; $v + c = v$ ist

$$(v+c)^2 = \frac{4rg}{M}(P\varphi + Q \operatorname{Cos} \varphi) + v^2 - \frac{4rg}{M} Q.$$

Nun muß aber, wenn ein Beharrungszustand eintreten soll, P so groß sein, daß $v+c$ wieder $=v$ ist, wenn $\varphi=\pi$ wird. Setzt man also v für $v+c$ und π für φ, so erhält man die erforderliche Kraft

$$P=\frac{2}{\pi}Q$$

und also, für den Beharrungszustand, $v+c$ als Funktion von φ, durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$(v+c)^2=v^2+\frac{4rgQ}{M}\left(\frac{2}{\pi}\varphi-\text{Sin v}\varphi\right).$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun für den Beharrungszustand

1) die Geschwindigkeit in den Augenblicken wo die Last ihr größtes Moment hat, wenn man $\frac{\pi}{2}$ für φ setzt,

$$=v;$$

2) den Punkt der größten Geschwindigkeit für

$$\varphi=\text{Arc. Sin}\frac{2}{\pi};$$ oder für

$39^\circ\ 32'\ 25''$

3) den Punkt der kleinsten Geschwindigkeit für

$$\varphi=\pi-\text{Arc Sin}\frac{2}{\pi};$$ oder für

$140^\circ\ 27'\ 35''$

4) die größte Geschwindigkeit selbst

$$=\sqrt{v^2+13{,}12\frac{rQ}{M}}$$

5) die Kleinste

$$= \sqrt{v^2 - 13{,}12 \, . \, \frac{rQ}{M}}$$

so daß also nothwendig

$$v > 3{,}626 \, . \sqrt{\frac{rQ}{M}} \text{ sein muß.}$$

Aus $P = \frac{2}{\pi} Q$ ersieht man auch noch, daß die für den Beharrungszustand erforderliche Kraft gerade so groß sein muß, als es das Moment des Widerstandes in dem Augenblick erfordert, wo die Geschwindigkeit am größten oder kleinsten ist.

Wird aber

II. W berücksichtigt, so erhält man aus der Gleichung

$$(v + c)^2 = 4g \int \frac{P - Q \operatorname{Sin} \varphi}{M + W \operatorname{Sin} \varphi^2} \, . \, d\,(r\varphi);$$

$$\frac{(v+c)^2}{4gr} = \frac{P}{\sqrt{M(M+W)}} \operatorname{Arc tg}\left(tg\varphi \sqrt{1 + \frac{W}{M}}\right)$$

$$+ \frac{Q}{2\sqrt{W(M+W)}} \ln \frac{\sqrt{M+W} + \operatorname{Cos}\varphi \sqrt{W}}{\sqrt{M+W} - \operatorname{Cos}\varphi \sqrt{W}} + \text{Const}$$

oder vollständig

$$\frac{(v+c)^2 - v^2}{4gr} = \frac{P}{\sqrt{M(M+W)}} \operatorname{Arc tg}\left(tg\varphi . \sqrt{1 + \frac{W}{M}}\right)$$

$$- \frac{Q}{2\sqrt{W(M+W)}}$$

$$\ln \frac{(\sqrt{M+W} + \sqrt{W})(\sqrt{M+W} - \operatorname{Cos}\varphi . \sqrt{W})}{(\sqrt{M+W} - \sqrt{W})(\sqrt{M+W} + \operatorname{Cos}\varphi \sqrt{W})} .$$

und hieraus für den erforderlichen Beharrungs=

zustand, also für $v + c = v$ wenn $\varphi = \pi$ ist; $\frac{W}{M}$ durch α ausgedrückt,

$$P = \frac{\ln(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{2}{\pi} Q.$$

Setzt man nun diesen Werth für P in die vorige vollständige Gleichung, so ergeben sich aus ihr folgende Gesetze

1) die Geschwindigkeit in den Augenblicken wo die Last ihr größtes Moment hat, ist

$$= v;$$

2) der Punkt der größten Geschwindigkeit der Warze entspricht

$$\varphi = \text{Arc. Sin} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ln(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} = \beta;$$

3) der Punkt der kleinsten Geschwindigkeit entspricht

$$\varphi = \pi - \text{Arc Sin} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ln(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} = \delta;$$

4) die größte Geschwindigkeit der Warze ist

$$= \left[v^2 + \frac{4rgQ}{M\sqrt{\alpha(1+\alpha)}} \left[\frac{2}{\pi} \cdot \ln(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{\alpha}) \right.\right.$$

$$\text{Arc tang}(\text{tg}\,\beta\sqrt{1+\alpha})$$

$$\left.\left. - \tfrac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{\alpha})(\sqrt{1+\alpha} - \text{Cos}\,\beta\sqrt{\alpha})}{(\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{1+\alpha} + \text{Cos}\,\beta\sqrt{\alpha})} \right] \right]^{\frac{1}{2}}$$

5) die Kleinste ist demselben Ausdruck gleich, nur δ für β geschrieben, und sie muß nothwendig größer wie Null sein.

Aus 2, 3, und

$$P = \frac{\ln(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{2}{\pi} Q$$

ersieht man auch, daß die für den Beharrungszustand erforderliche Kraft gerade so groß sein muß, als es das Moment des Widerstandes in dem Augenblick erfordert, wo die Geschwindigkeit am größten oder kleinsten ist.

Die Formel

$$P = \frac{\ln(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{2}{\pi} Q;$$

liefert, wenn W also auch α gleich Null gesetzt wird,

$$P = \frac{2}{\pi} Q.$$

Für jeden andern Werth von W wird

$$\frac{\ln(\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}$$

kleiner wie 1 also die erforderliche Kraft $< \frac{2}{\pi} Q$, und zwar um desto kleiner je größer man α nimmt. Man muß folglich W groß machen, aber eine gewisse Gränze nicht überschreiten, weil mit W auch Q wächst. Diese Gränze ist in §. 6 der erwähnten Theorie des Krummzapfen bestimmt.

Zum eignen weiteren Studium der angewandten Mathematik in Beziehung auf Anwendung sind die Werke von Eytelwein, Langsdorf, Prony, du Bûat, Brandes, Baader zu empfehlen.

Gedruckt bei G. Hayn.

Verbesserungen.

Seite 14 Zeile 6 von oben: ließ Curve für Curen.
— — — 5 — unten: ließ das für des.
— 15 — 17 — oben: ließ taylorsche für teylorsche.
— 16 — 8 — — muß das Wort ist weggestrichen werden.
— 20 — 13 — — ließ $f'x$ für fx.
— 62 letzte Zeile: ließ MRJ für MRT'.
— 64 Zeile 4 von oben: ließ 1 für 2.
— 86 — 9 — — ließ Beharrungsvermögen für Beherrungsvermögen.
— 109 — 14 — — ließ $\frac{1}{c}$ für 1/[illegible]
— 152 — 4 — unten: ließ 2r für 2x.
— 154 — 8 — oben: ließ bewegen für befinden.
— 174 — 3 — unten: ließ Ist $\beta = 90°$; für Ist $\beta = 0$.

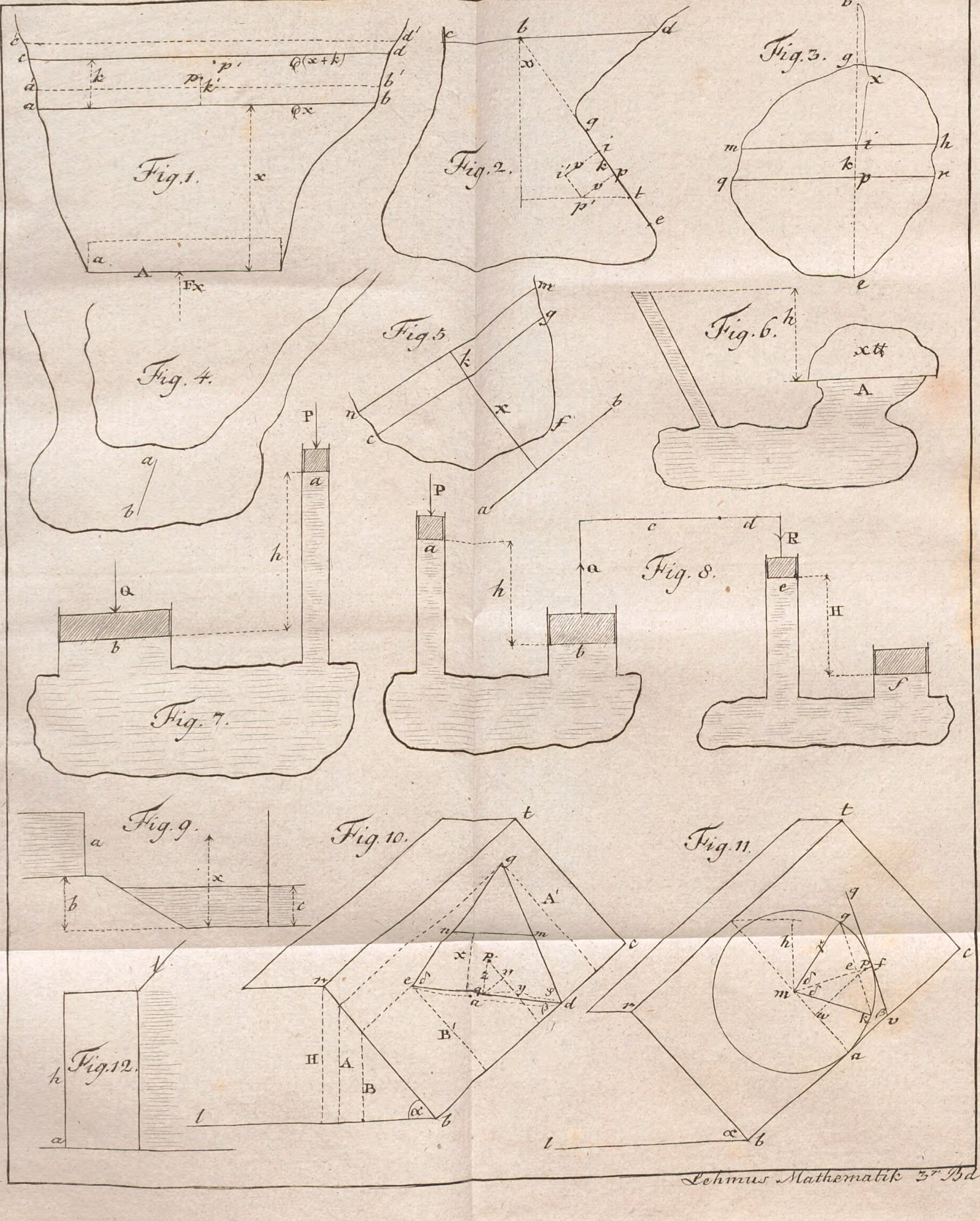


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

Fig. 13.

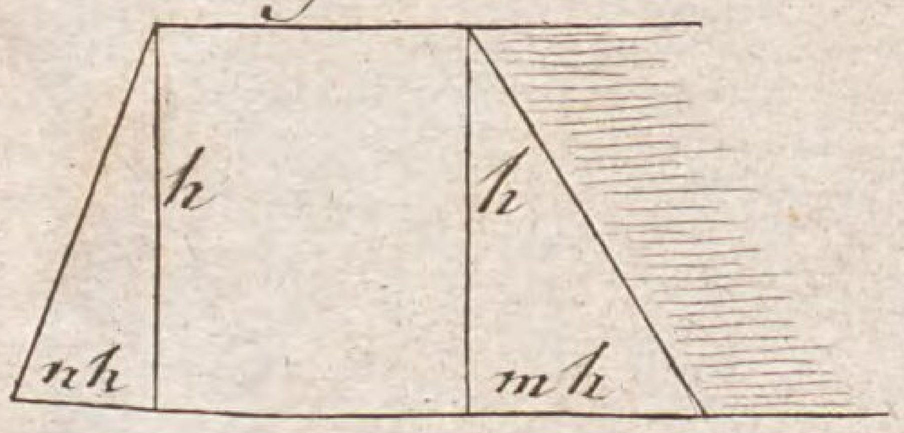


Fig. 15.

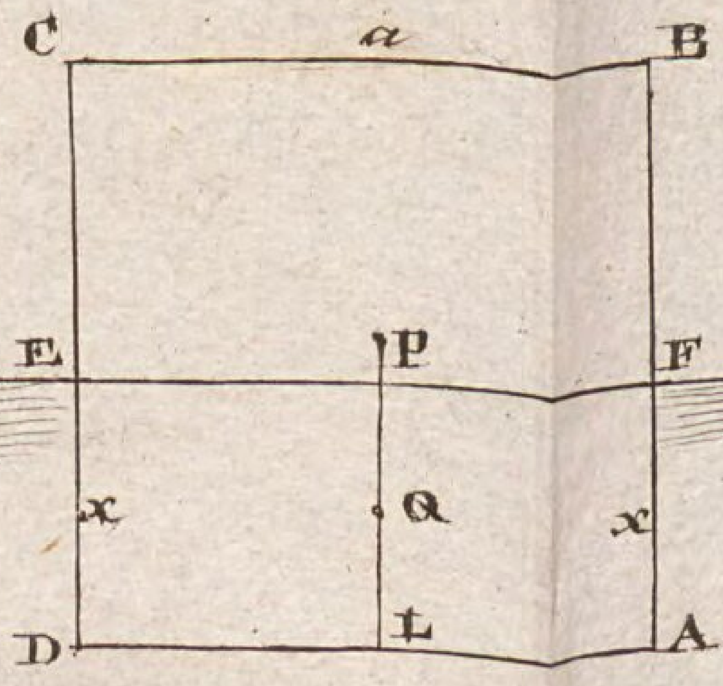


Fig. 16.

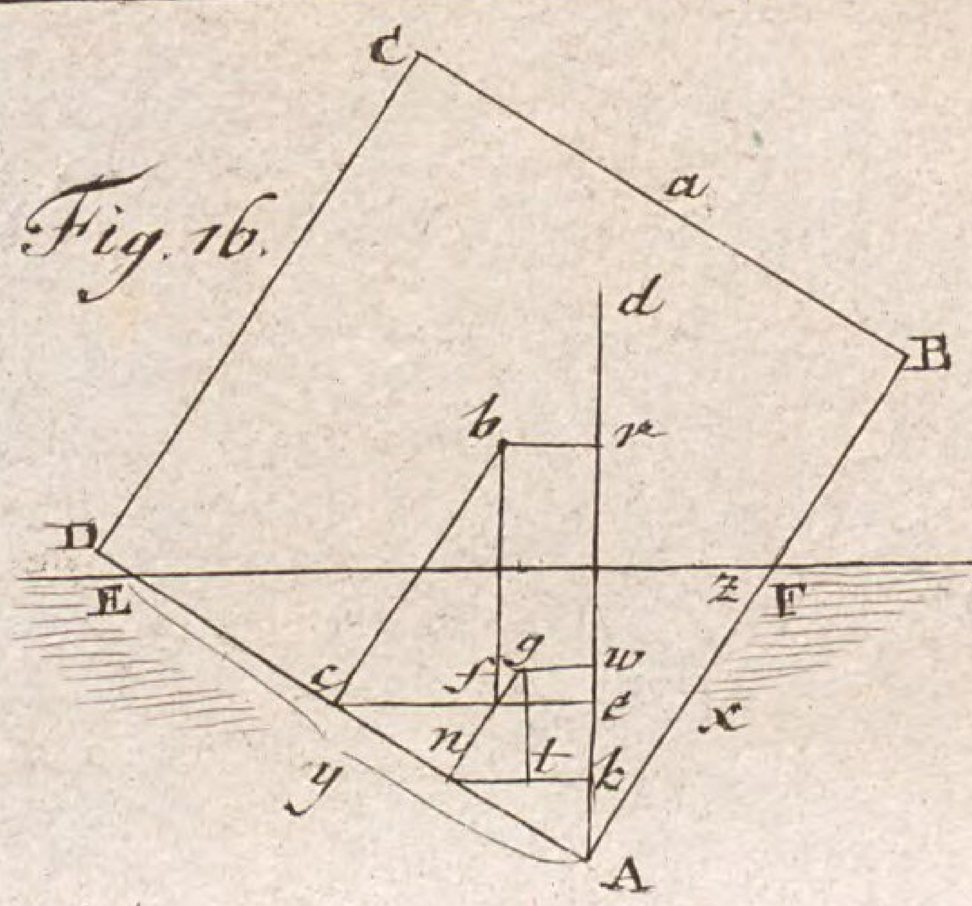


Fig. 14.

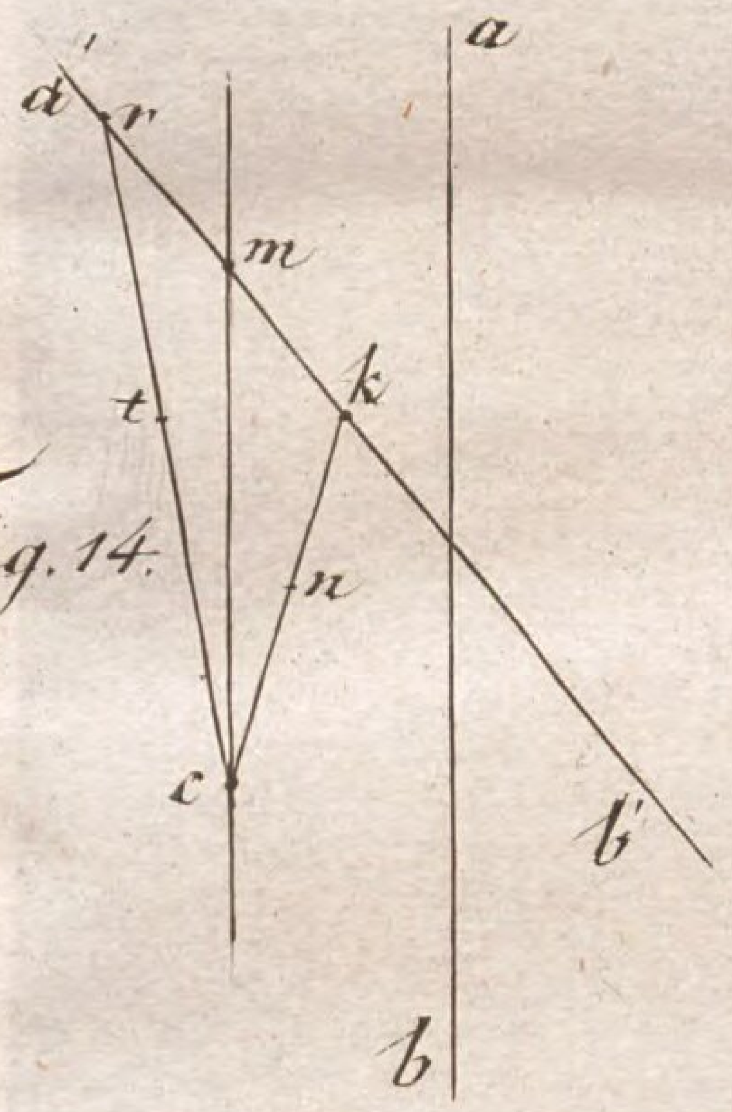


Fig. 17.

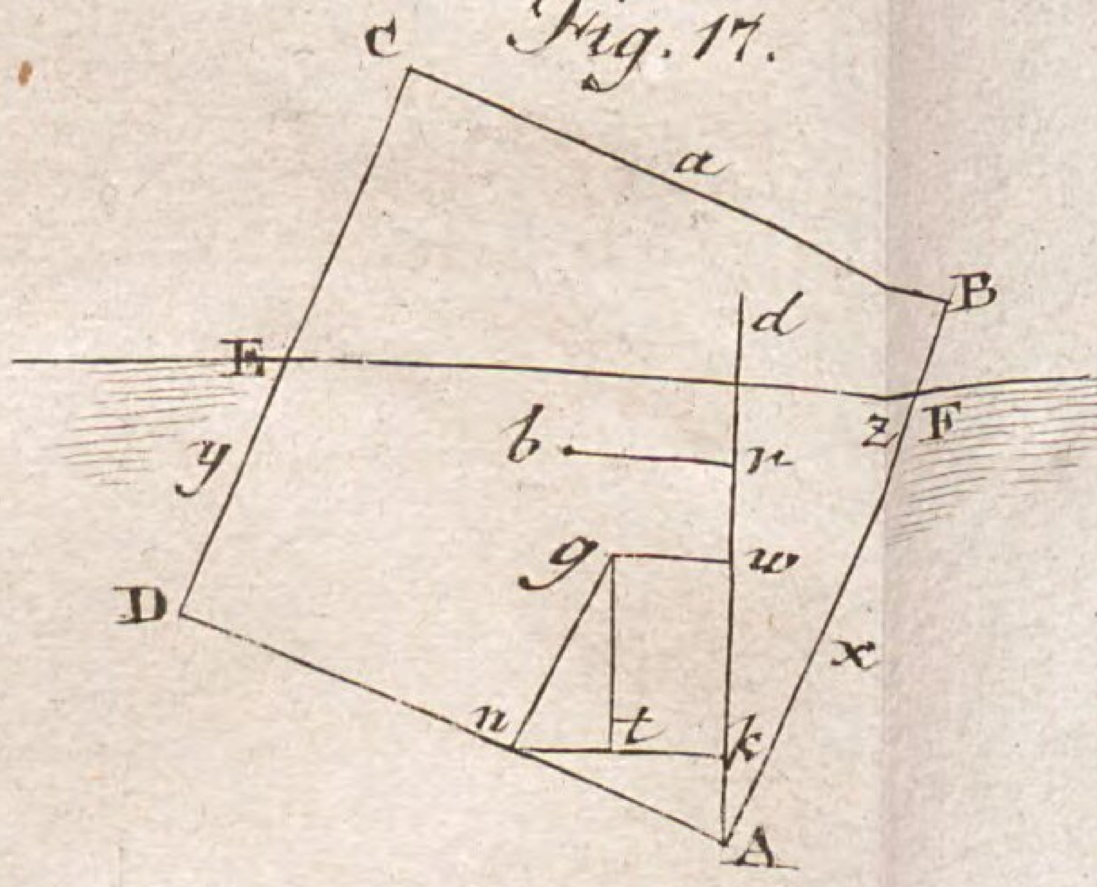


Fig. 18.

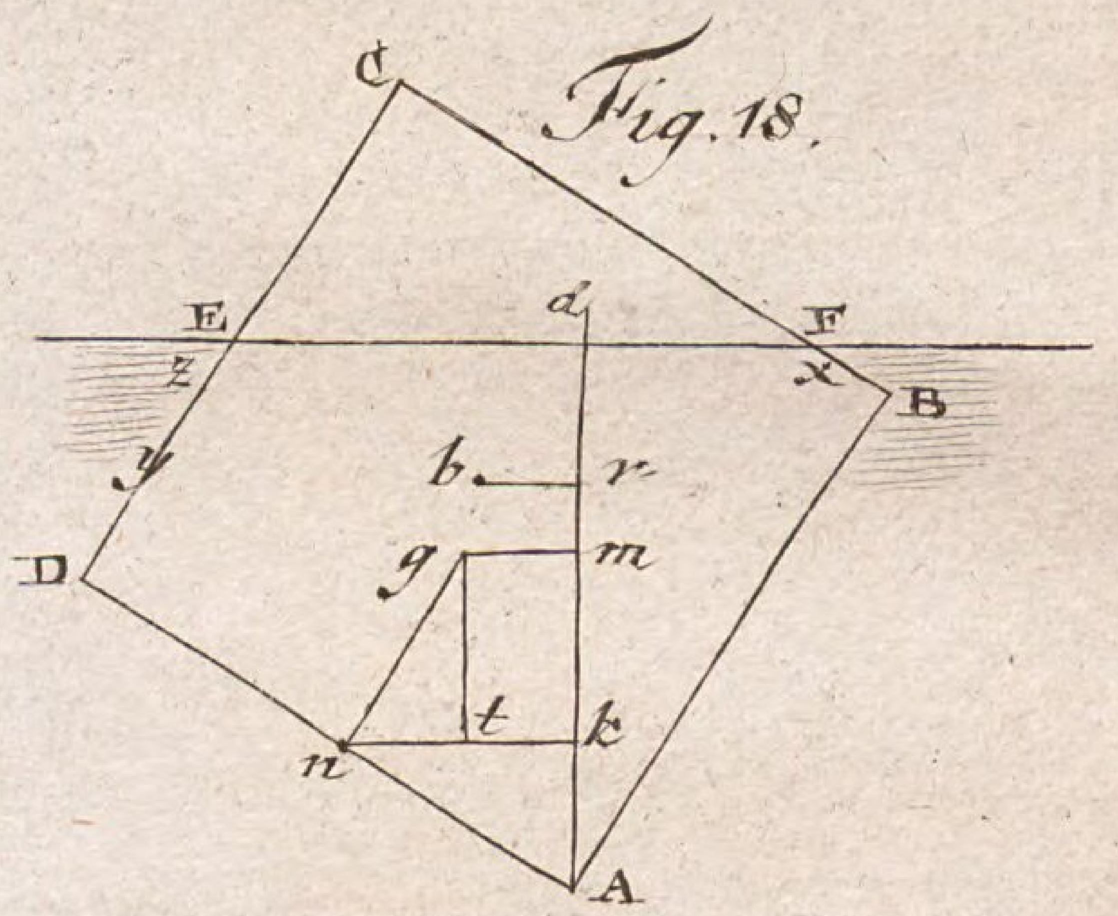


Fig. 19.

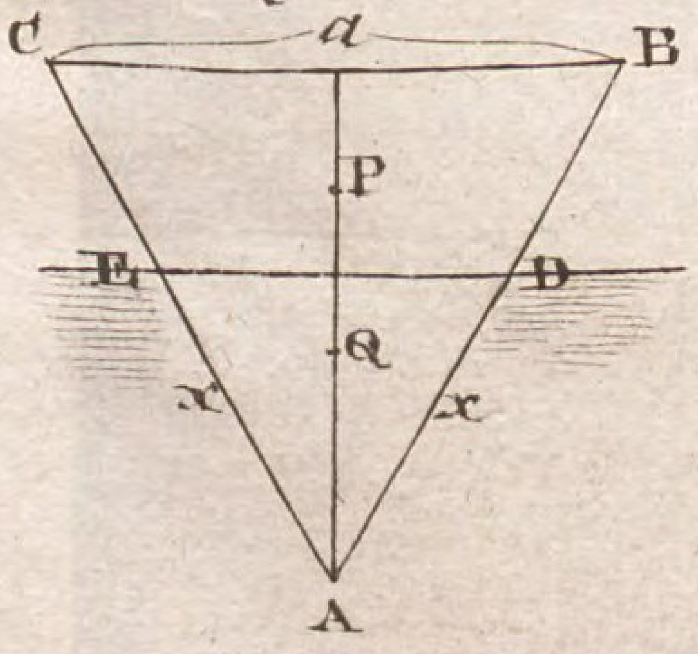


Fig. 20.

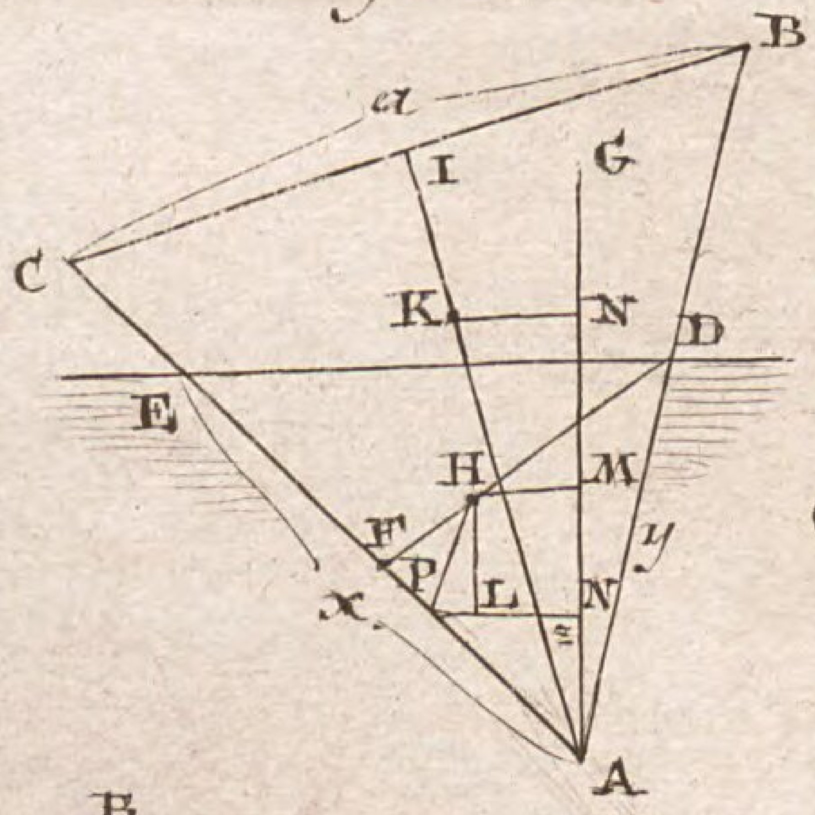


Fig. 21.

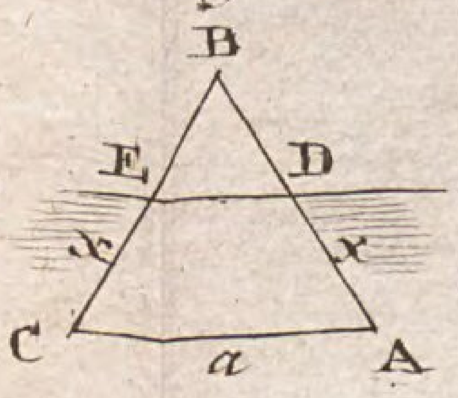


Fig. 22.

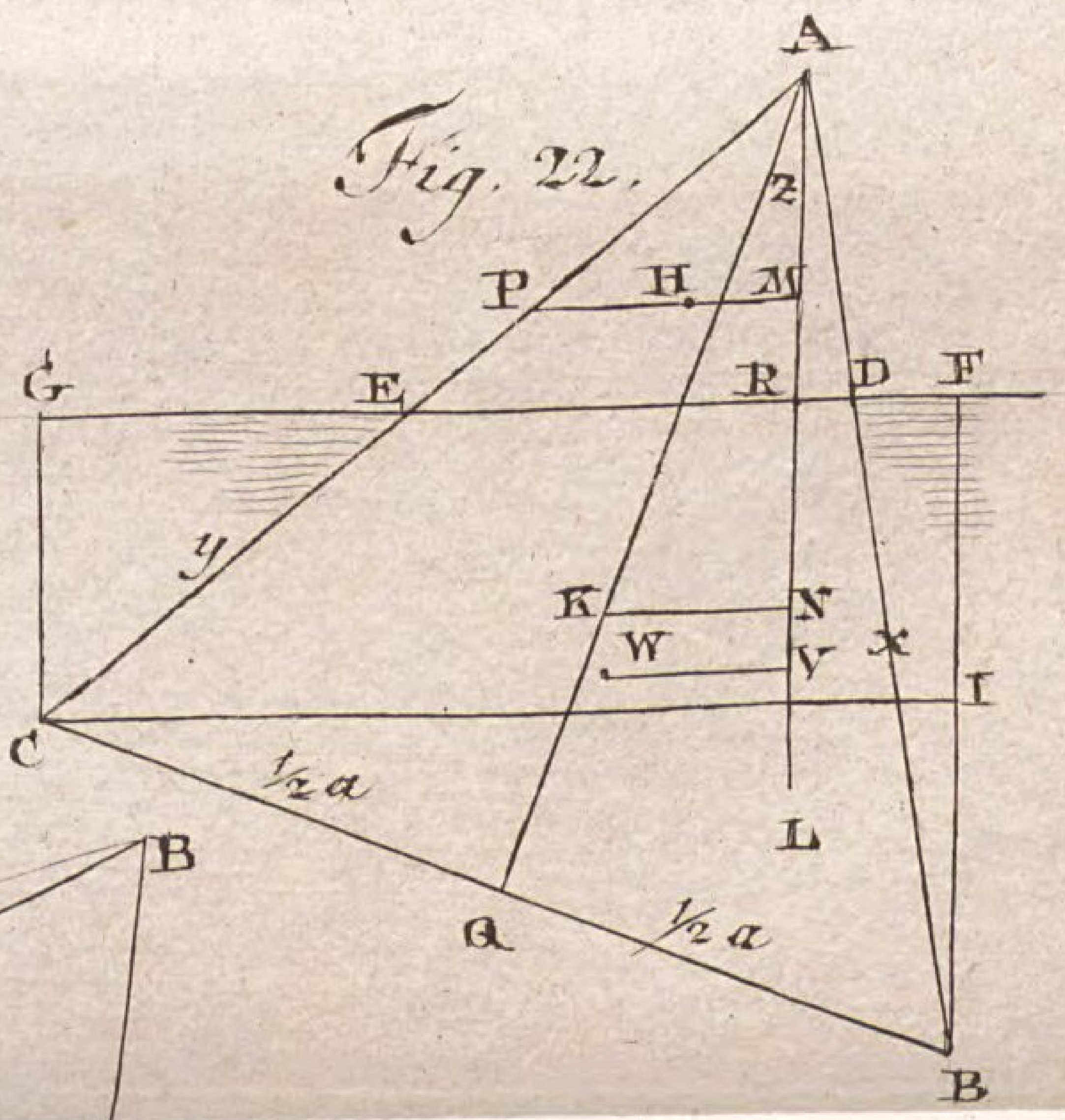


Fig. 23.

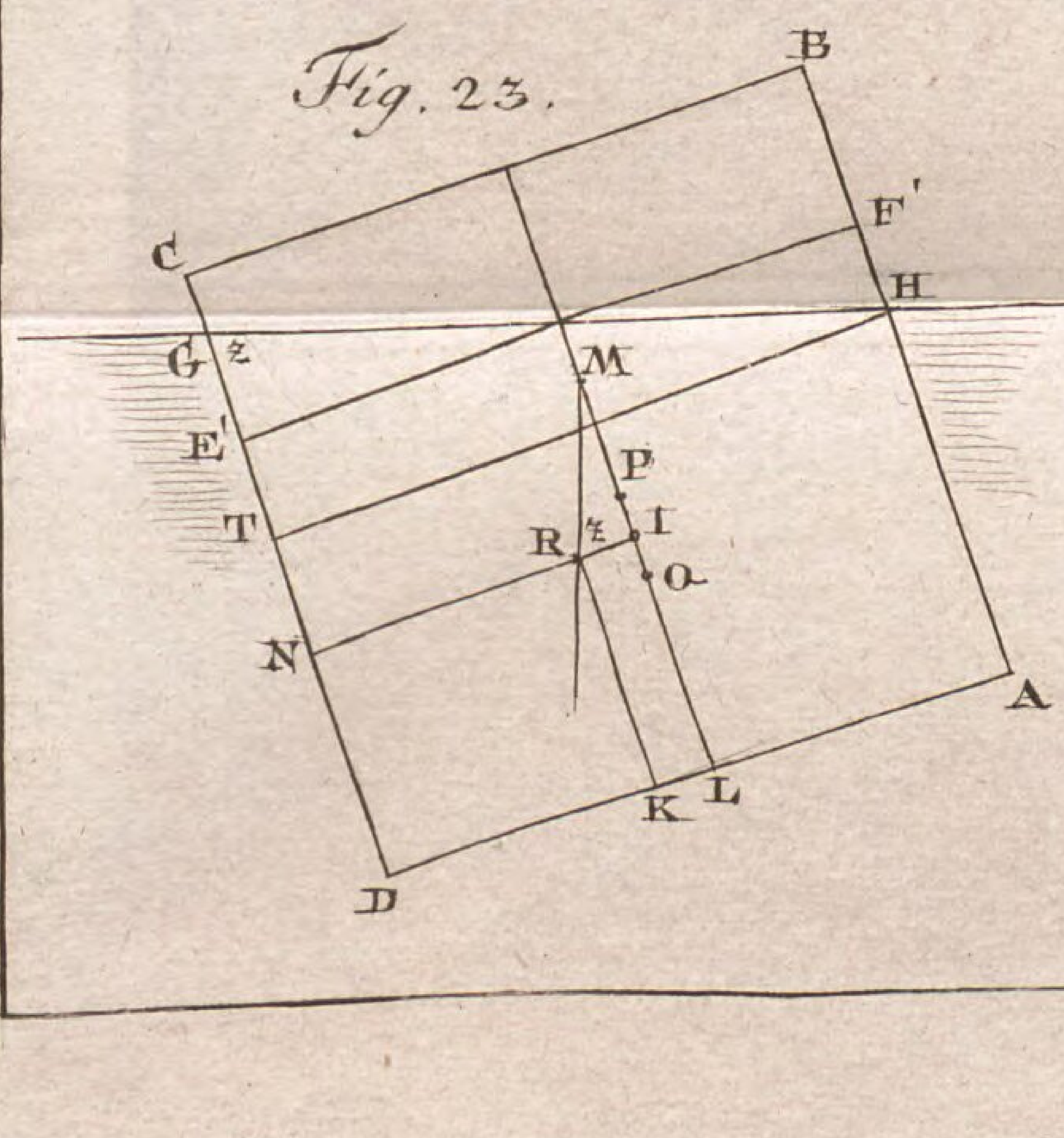


Fig. 24.

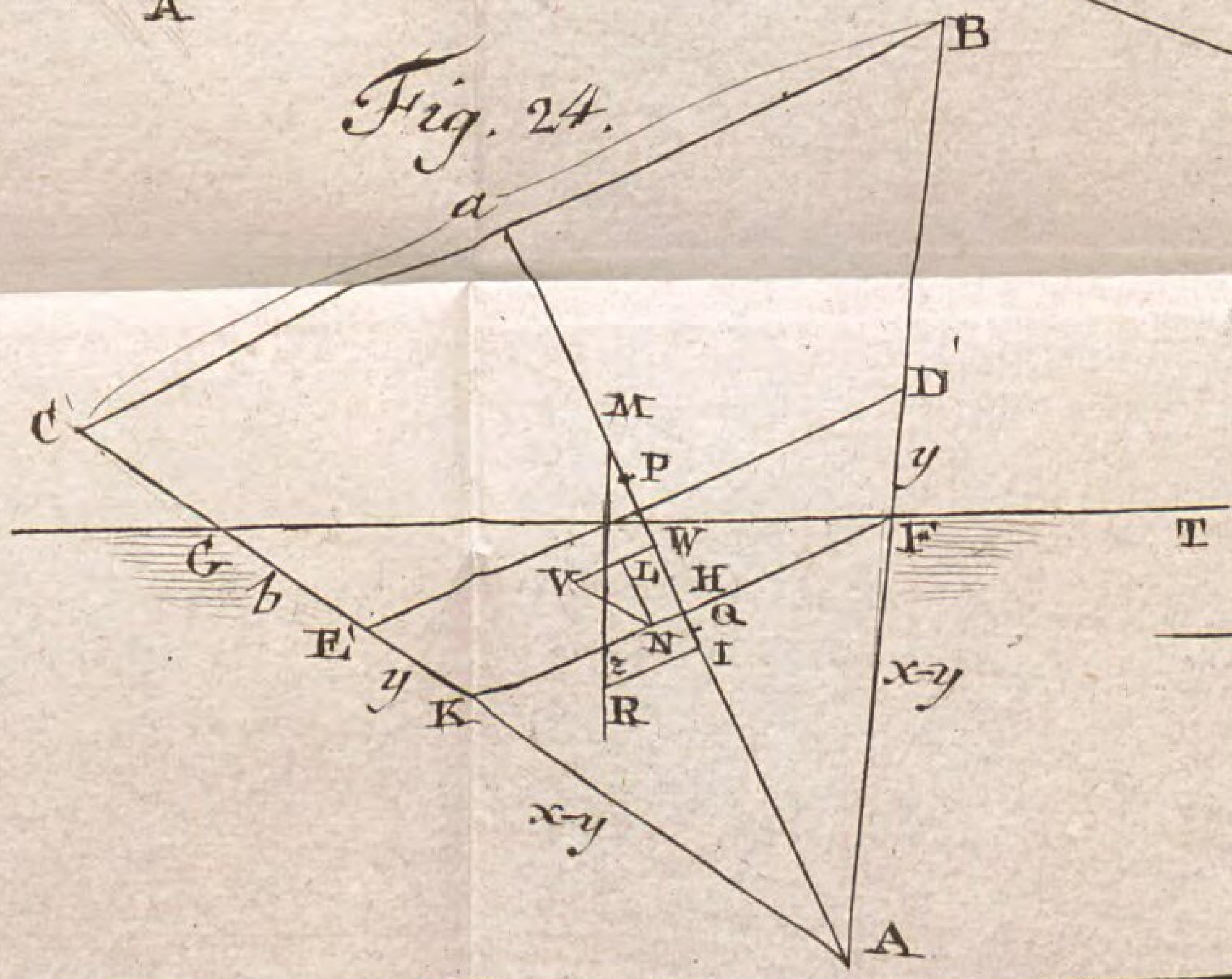
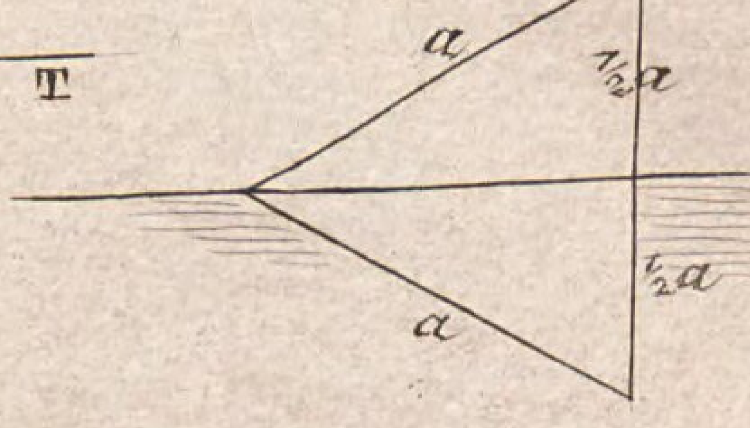


Fig. 25.



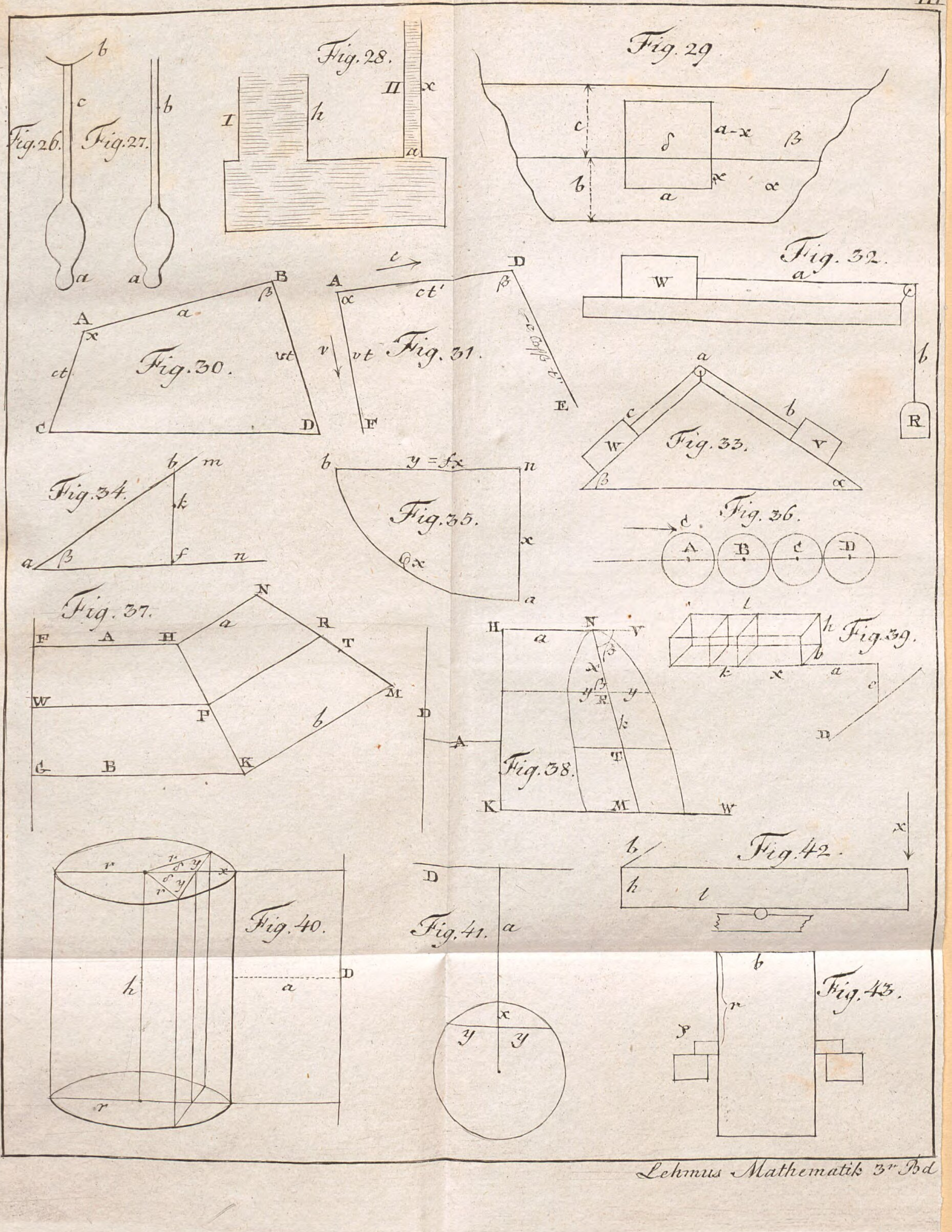


Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.

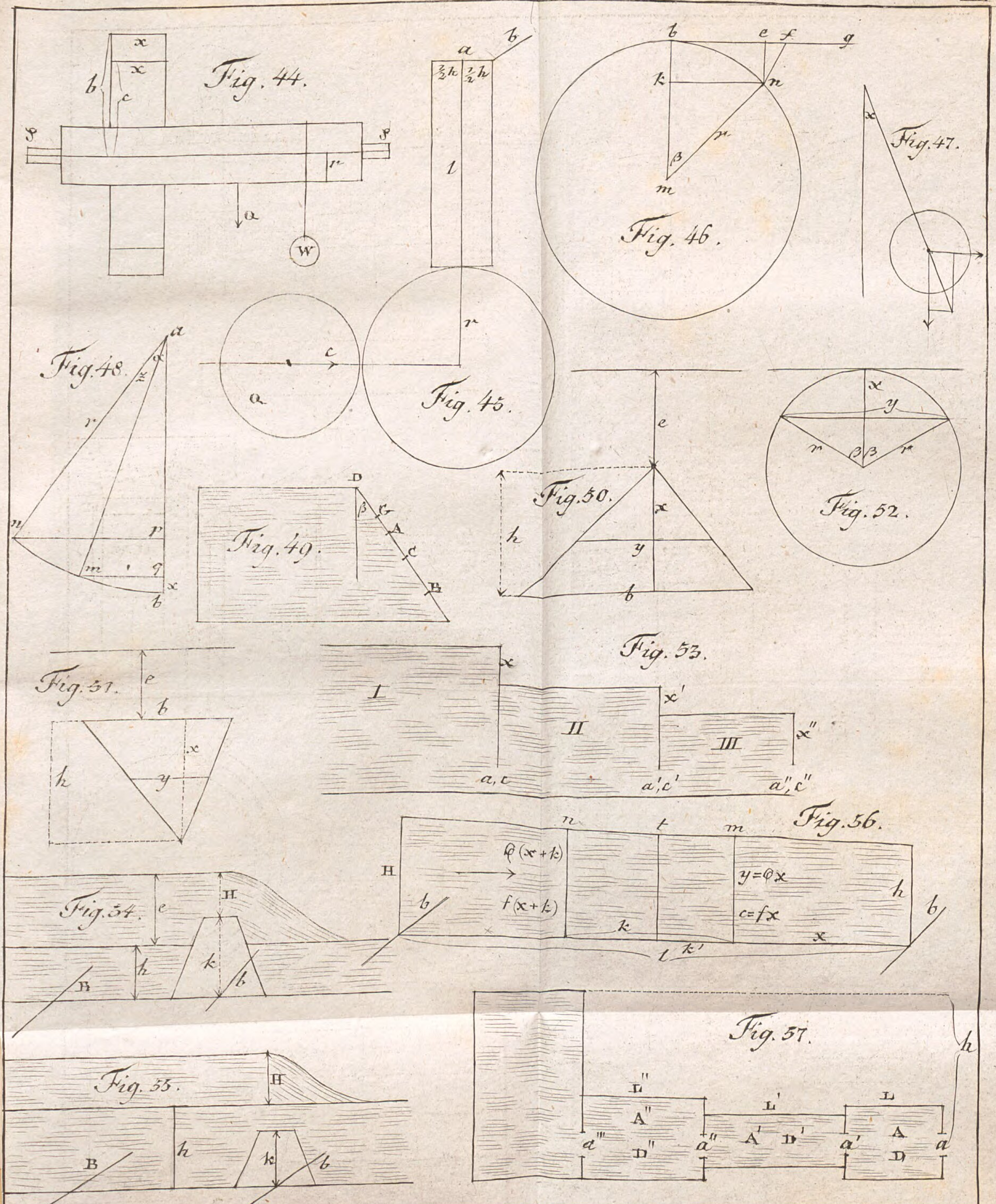


Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
φ(x+k)
f(x+k)
y=φx
c=fx

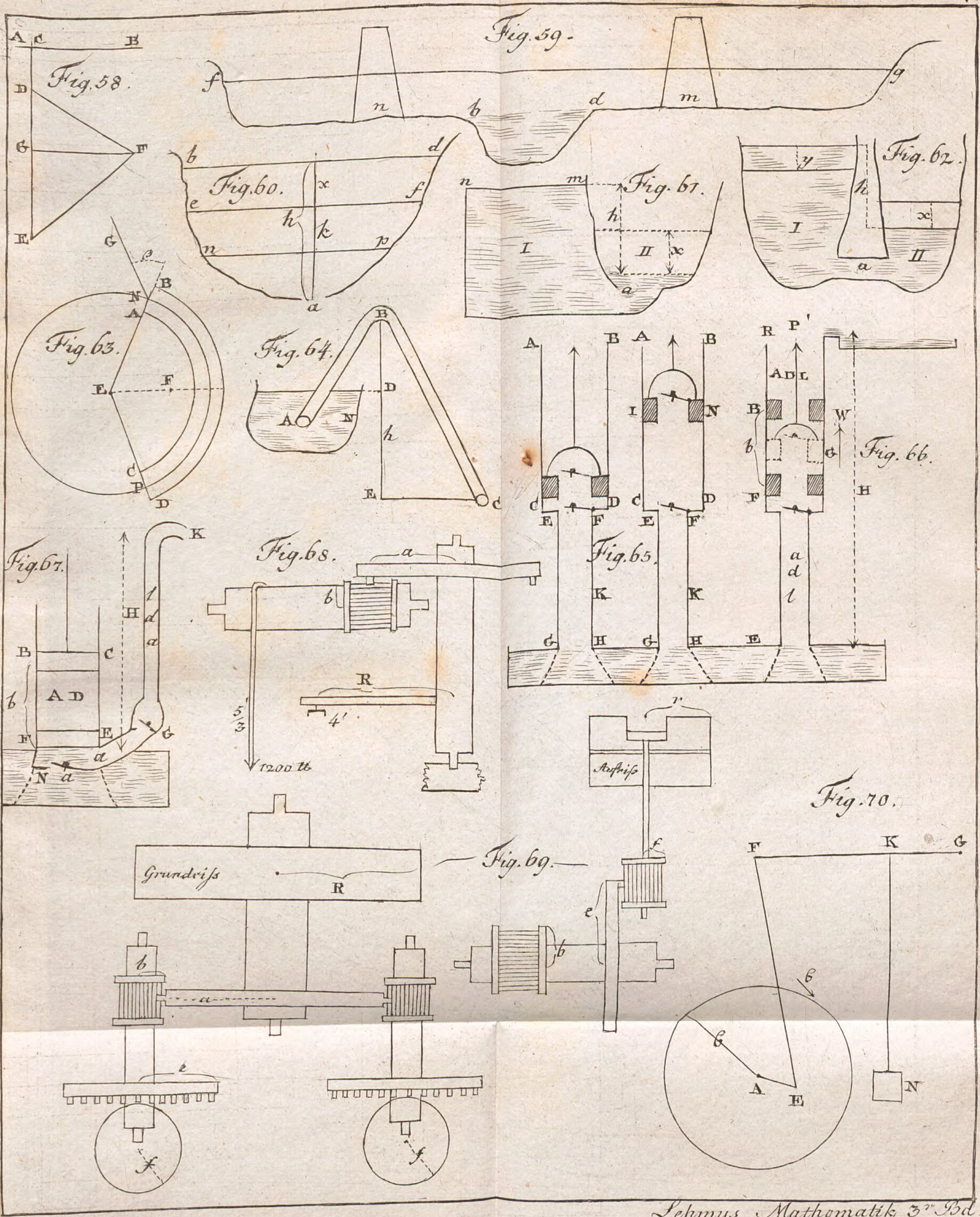


Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
1200 tt
Fig. 69.
Grundriss
Aufriss
Fig. 70.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehmus, Daniel Christian Ludolph,

Lehrbuch der angewandten Mathematik

Bd.: Dritter Band

Berlin 1822

Math.a. 154 h-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080895-9